Método abreviado para obtener la descomposición en fracciones simples de una función racional en un caso particular

Pedro González Ruiz

Sevilla, abril de 2024

1. Introducción y notaciones

Sean p y q polinomios en una indeterminada x, q irreducible sobre $\mathbb{R}$, es decir, de grado 1 o de grado 2 con discriminante negativo, o lo que es lo mismo, sin raíces reales y sea n cualquier número natural. Pretendemos obtener la descomposición de $\dfrac{p}{q^n}$ en fracciones simples de forma sencilla, sin aplicar el método habitual de coeficientes indeterminados.

El grado de un polinomio p lo indicamos como $\mathrm{gr}(p)$. La división con resto entre dos polinomios a y b la indicamos como

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & c \end{array}, \quad a = bc + r,\ \mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(b)$$

es decir, a es el dividendo, b es el divisor, c es el cociente y r el resto. El discriminante de un polinomio cuadrático $ax^2 + bc + c$ es $\Delta = b^2 - 4ac$.

2. Desarrollo

Sea nuestra fracción original p/q^n. La regla básica es la siguiente: haciendo la división entre p y q, tenemos

$$\begin{array}{r|l} p & q \\ \hline r & c \end{array}, \quad p = qc + r,\ \mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(q)$$

y por tanto

$$\frac{p}{q^n} = \frac{cq + r}{q^n} = \frac{r}{q^n} + \frac{c}{q^{n-1}}$$

Destacamos este resultado

$$\frac{p}{q^n} = \frac{r}{q^n} + \frac{c}{q^{n-1}} \tag{1}$$

El sumando $\dfrac{r}{q^n}$ está ya desarrollado, puesto que $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(q)$, y la fracción $\dfrac{c}{q^{n-1}}$ es idéntica a la original $\dfrac{p}{q^n}$, salvo que el grado del cociente c es menor que el grado del original p y que el exponente del denominador es una unidad menos. Siguiendo la recurrencia, obtenemos la descomposición.

Veamos un ejemplo. Descomponer $\dfrac{x^4}{(x^2+x+1)^3}$ en fracciones simples. El discriminate de x^2+x+1 es $\Delta=-3$, luego es irreducible. En fin

$$\begin{array}{c|c} x^4 & x^2+x+1 \\ \hline x & x^2-x \end{array} \Longrightarrow \frac{x^4}{(x^2+x+1)^3} = \frac{x}{(x^2+x+1)^3} + \frac{x^2-x}{(x^2+x+1)^2}$$

Otra vez

$$\begin{array}{c|c} x^2-x & x^2+x+1 \\ \hline -2x-1 & 1 \end{array} \Longrightarrow \frac{x^2-x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{x^2+x+1}$$

luego

$$\frac{x^4}{(x^2+x+1)^3} = \frac{x}{(x^2+x+1)^3} - \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{x^2+x+1}$$

que es la descomposición pedida.

Observemos que la única dificultad del método reside en efectuar la división repetida entre p y q, así pues, en los casos que siguen, indicamos procedimientos para evitar hacer dicha división.

Distinguimos los siguientes

1. $q(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Hacemos la sustitución $y=ax$ (siempre que $a\neq 1$) tanto en el numerador como en el denominador, y acto seguido, podemos aplicar la regla de Ruffini para obtener los cocientes y restos, que junto con (1) da la descomposición seguida. Veamos un par de ejemplos.

   - Descomponer $\dfrac{x^5}{(x+1)^4}$ en fracciones simples. Tenemos:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline
 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{-1} \\
-1 & & -1 & 2 & -3 & 4 & \\ \hline
 & 1 & -2 & 3 & -4 & \boxed{5} & \\
-1 & & -1 & 3 & -6 & & \\ \hline
 & 1 & -3 & 6 & \boxed{-10} & & \\
-1 & & -1 & 4 & & & \\ \hline
 & 1 & -4 & \boxed{10} & & &
\end{array}$$

   luego, por (1) es

$$\frac{x^5}{(x+1)^4} = x-4+\frac{10}{x+1} - \frac{10}{(x+1)^2} + \frac{5}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^4}$$

   que es la descomposición pedida.

   - Descomponer $\dfrac{x^3+2x-1}{(2x+1)^3}$ en fracciones simples.

$$\frac{x^3+2x-1}{(2x+1)^3} = \{y=2x\} = \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^3+y-1}{(y+1)^3} = \frac{1}{8}\cdot\frac{y^3+8y-8}{(y+1)^3}$$

   Por tanto

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 8 & -8 \\
-1 & & -1 & 1 & -9 \\
\hline
 & 1 & -1 & 9 & \boxed{-17} \\
-1 & & -1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & \boxed{11} & \\
-1 & & -1 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{-3} & &
\end{array}$$

y de aquí

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8}\cdot\frac{y^3+8y-8}{(y+1)^3} &= \frac{1}{8}\left[\frac{-17}{(y+1)^3}+\frac{11}{(y+1)^2}-\frac{3}{y+1}+1\right]= \\
&= -\frac{17}{8(2x+1)^3}+\frac{11}{8(2x+1)^2}-\frac{3}{8(2x+1)}+\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

2. $q(x)=x^2+a$, $a\in\mathbb{R}$, $a>0$. Tanto en el numerador como en el denominador hacemos la sustitución $y=x^2$, pero en el numerador seguimos la siguiente regla:

$$a_{2j+1}x^{2j+1}+a_{2j}x^{2j}=x^{2j}(a_{2j+1}x+a_{2j})=y^j(a_{2j+1}x+a_{2j})$$

con lo que nos queda un polinomio en y, cuyos coeficientes no son constantes, sino polinomios de grado 1 en x. Acto seguido, seguimos el procedimiento del caso primero. Veamos unos ejemplos.

- Descomponer

$$\frac{x^7+5x^5-x^4+10x^3-x^2+7x+2}{(x^2+3)^3}$$

en fracciones simples.

Tenemos

$$\begin{aligned}
x^7 &= y^3x \\
5x^5-x^4 &= y^2(5x-1) \\
10x^3-x^2 &= y(10x-1)
\end{aligned}$$

con lo que la fracción original queda como

$$\frac{y^3x+y^2(5x-1)+y(10x-1)+7x+2}{(y+3)^3}$$

Ahora podemos aplicar la regla de Ruffini para obtener la descomposición. Así pues:

$$\begin{array}{r|cccc}
 & x & 5x-1 & 10x-1 & 7x+2 \\
-3 & & -3x & -6x+3 & -12x-6 \\
\hline
 & x & 2x-1 & 4x+2 & \boxed{-5x-4} \\
-3 & & -3x & 3x+3 & \\
\hline
 & x & -x-1 & \boxed{7x+5} & \\
-3 & & -3x & & \\
\hline
 & x & \boxed{-4x-1} & &
\end{array}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{y^3x+y^2(5x-1)+y(10x-1)+7x+2}{(y+3)^3} &= x-\frac{5x+4}{(y+3)^3}+\frac{7x+5}{(y+3)^2}-\frac{4x+1}{y+3}= \\
&= x-\frac{5x+4}{(x^2+3)^3}+\frac{7x+5}{(x^2+3)^2}-\frac{4x+1}{x^2+3}
\end{aligned}$$

que es la descomposición que pretendíamos.

- Descomponer
$$\frac{x^5}{(x^2+1)^4}$$
en fracciones simples.
Tenemos
$$\frac{x^5}{(x^2+1)^4} = \{x^2 = y\} = \frac{y^2 x}{(y+1)^4}$$
En fin
$$\begin{array}{c|ccc}
 & x & 0 & 0 \\
\text{-1} & & -x & x \\
\hline
 & x & -x & \boxed{x} \\
\text{-1} & & -x & \\
\hline
 & x & \boxed{-2x} &
\end{array}$$
y por tanto
$$\begin{aligned}\frac{y^2x}{(y+1)^4} &= \frac{x}{(y+1)^4} - \frac{2x}{(y+1)^3} + \frac{x}{(y+1)^2} = \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^4} - \frac{2x}{(x^2+1)^3} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

3. El caso general
$$\frac{p(x)}{(ax^2+bc+c)^n},\ n \in \mathbb{N},\ \Delta = b^2 - 4ac < 0$$
se complica mucho, y no vale la pena, en general, reducirlo al caso anterior. Es preferible hacer las divisiones polinómicas. No obstante, indicamos la reducción para que el lector se dé cuenta de que el camino no es bueno. La sustitución $y = (ax^2+bx+c)' = 2ax+b$ es tal que
$$\frac{p(x)}{(ax^2+bc+c)^n} = \left\{\begin{array}{l} y = 2ax+b \\ x = \dfrac{y-b}{2a} \end{array}\right\} = (4a)^n \frac{p\left(\frac{y-b}{2a}\right)}{\left(y^2+|\Delta|\right)^n}$$
con lo cual ya estamos en el caso anterior. Ahora bien, hay que desarrolar el numerador $p\left(\dfrac{y-b}{2a}\right)$ y ordenarlo. Veamos un ejemplo.

Desarrollar en fracciones simples $\dfrac{x^3-3x^2+5x+3}{(x^2+x+1)^3}$.

Directamente, tenemos
$$\begin{array}{c|c} x^3-3x^2+5x+3 & x^2+x+1 \\ \hline 8x+7 & x-4 \end{array} \Longrightarrow \frac{x^3-3x^2+5x+3}{(x^2+x+1)^3} = \frac{8x+7}{(x^2+x+1)^3} + \frac{x-4}{(x^2+x+1)^2}$$
Simple y rápido. Ahora, por el método de más arriba
$$\begin{aligned}\frac{x^3-3x^2+5x+3}{(x^2+x+1)^3} &= \left\{\begin{array}{l} y = 2x+1 \\ x = \dfrac{y-1}{2} \end{array}\right\} = \{\text{cálculos}\} = 8 \cdot \frac{y^3-9y^2+35y-3}{(y^2+3)^3} = \\ &= \{y^2 = z\} = 8 \cdot \frac{z(y-9)+35y-3}{(z+3)^3}\end{aligned}$$
y, de aquí

$$
\begin{array}{r|ll}
 & y-9 & 35y-3 \\
\text{-3} & & -3y+27 \\
\hline
 & y-9 & \boxed{32y+24}
\end{array}
$$

luego, la última fracción es

$$
\begin{aligned}
8\left[\frac{32y+24}{(z+3)^3}+\frac{y-9}{(z+3)^2}\right] &= 8^2\cdot\frac{4y+3}{(y^2+3)^3}+8\cdot\frac{y-9}{(y^2+3)^2}=\{y^2+3=4(x^2+x+1)\}= \\
&= 8^2\cdot\frac{8x+7}{4^3(x^2+x+1)^3}+16\cdot\frac{x-4}{4^2(x^2+x+1)^2}= \\
&= \frac{8x+7}{(x^2+x+1)^3}+\frac{x-4}{(x^2+x+1)^2}
\end{aligned}
$$

En definitiva, demasiados cálculos para llegar a un resultado que puede obtenerse mucho más sencillamente por el primer camino.

Convencidos de que el caso general es, en general, inaplicable, sería conveniente disponer de una regla sencilla para dividir un polinomio cualquiera por otro de grado 2, y ese es el objetivo del siguiente apartado.

3. Algoritmo para dividir un polinomio por otro de grado 2

Un polinomio con una indeterminada x se representará, bien de la forma habitual, o también, como un vector de $\mathbb{R}^{n+1}$, siendo n el grado, donde la primera coordenada es el coeficiente del mayor monomio, en concreto

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\equiv(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n)$$

Por ejemplo:

$$
\begin{gathered}
5x^3-2x^2+5x-3\equiv(5,-2,5,-3) \\
x^2+5x+2\equiv(1,5,2)
\end{gathered}
$$

El divisor d, de grado 2, para simplificar el algoritmo, será mónico, es decir, su coeficiente líder es 1, por tanto

$$d\equiv x^2-ax-b\equiv(1,-a,-b),\ a,b\in\mathbb{R}$$

En fin, dado el dividendo $D=(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n)$ y el divisor $d=(1,-a,-b)$, se trata de calcular el cociente y el resto. No se entrega ninguna demostración del algoritmo, ya que es suficiente hacer la división habitual para comprender el porqué de la regla. Utilizamos las siguientes recurrencias con sus correspondientes condiciones iniciales:

$$
\begin{aligned}
q_i&=a_i+b\cdot p_{i-2},\ i\geq 2,\ q_0=a_0,\ q_1=a_1 \\
p_i&=q_i+a\cdot p_{i-1},\ i\geq 1,\ p_0=a_0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

En fin, organizamos los cálculos partiendo de la siguiente tabla:

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
$q_n(b)$	a_0	a_1			
$p_n(a)$	a_0				

La etiqueta $q_n(b)$ indica que los q_n utilizan la variable b y $p_n(a)$ es para mostrar que los p_n utilizan la a.

En fin, en cada iteración hemos de calcular dos números, en primer lugar p_1 y después q_2. Así, de (2) es

$$p_1 = q_1 + ap_0,\ q_2 = a_2 + bp_0$$

Después, obtendríamos p_2 y q_3, etc. Después de todas las iteraciones el cociente es la fila p_n sin el último número y el resto es el par formado por el último p_n junto con el último q_n. Veamos unos ejemplos.

1. $D \equiv 4x^4 - x^3 - x^2 - 3x - 5,\ d \equiv x^2 - x - 3 \Longrightarrow a = 1,\ b = 3$. Tenemos

	4	-1	-1	-3	-5
$q_n(3)$	4	-1	11	6	37
$p_n(1)$	4	3	14	20	

   luego resto $= (20, 37) = 20x + 37$, cociente $= (4, 3, 14) = 4x^2 + 3x + 14$.

2. $D \equiv 5x^7 - x^6 - 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 4,\ d \equiv x^2 + 3x + 3 \Longrightarrow a = -3,\ b = -3$. Tenemos

	5	-1	0	-2	5	-4	0	4
$q_n(-3)$	5	-1	-15	46	-94	155	-195	124
$p_n(-3)$	5	-16	33	-53	65	-40	-75	

   luego resto $= (-75, 124) = -75x + 124$, cociente $= (5, -16, 33, -53, 65, -40) = 5x^5 - 16x^4 + 33x^3 - 53x^2 + 65x - 40$.

3. $D \equiv -4x^6 + 2x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2,\ d \equiv x^2 - x + 1 \Longrightarrow a = 1,\ b = -1$. Tenemos

	-4	2	4	-2	-2	0	-2
$q_n(-1)$	-4	2	8	0	-8	-6	0
$p_n(1)$	-4	-2	6	6	-2	-8	

   luego resto $= (-8, 0) = -8x$, cociente $= (-4, -2, 6, 6, -2) = -4x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 6x - 2$.

4. $D \equiv x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 9x + 1,\ d \equiv x^2 - 4x + 1 \Longrightarrow a = 4,\ b = -1$. Tenemos

	1	-3	-6	15	-9	1
$q_n(-1)$	1	-3	-7	14	-6	-1
$p_n(4)$	1	1	-3	2	2	

   luego resto $= (2, -1) = 2x - 1$, cociente $= (1, 1, -3, 2) = x^3 + x^2 - 3x + 2$.

3.1. Dos casos particulares

- $a = 0$. Por (2), es $p_i = q_i$, luego solo necesitamos calcular los q_i. Veamos un ejemplo, sean $D \equiv x^5 + x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 5x + 9,\ d \equiv x^2 + 4 \Longrightarrow a = 0,\ b = -4$. Tenemos

	1	1	-3	8	-5	9
$q_n(-4)$	1	1	-7	4	23	-7
$p_n(0)$	1	1	-7	4	23	

  luego resto $= (23, -7) = 23x - 7$, cociente $= (1, 1, -7, 4) = x^3 + x^2 - 7x + 4$.

- $b = 0$. Por (2), es $q_i = a_i$, es decir, la primera y segunda filas son idénticas, luego solo necesitamos calcular los p_i. Veamos un ejemplo, sean $D \equiv x^5 + x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 5x + 9$, $d \equiv x^2 + x \Longrightarrow a = -1,\ b = 0$. Tenemos

	1	1	-3	8	-5	9
$q_n(0)$	1	1	-3	8	-5	9
$p_n(-1)$	1	0	-3	11	-16	

luego resto $= (-16, 9) = -16x + 9$, cociente $= (1, 0, -3, 11) = x^3 - 3x + 11$.

3.2. Números de Fibonacci

Consideremos los números de Fibonacci

$$\{f_n\}_{n\geq 0} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,\ n \geq 0$$

y en lo que sigue el polinomio divisor es $d = x^2 - x - 1 \equiv (1, -1, -1) \Longrightarrow a = b = 1$. Entonces, consideremos los dos siguientes casos:

- $D \equiv (1, 1, \dots, 1) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1 = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, es decir, $a_i = 1,\ 0 \leq i \leq n$. En éste caso, los q_i son los primeros números de Fibonacci.

  En efecto, las recurrencias (2) se convierten en:

  $$\begin{aligned} q_i &= 1 + p_{i-2},\ i \geq 2,\ q_0 = q_1 = 1 \\ p_i &= q_i + p_{i-1},\ i \geq 1,\ p_0 = 1 \end{aligned}$$

  En fin

  $$q_{i+2} - 1 = p_i = q_i + p_{i-1} = q_i + q_{i+1} - 1 \Longrightarrow q_{i+2} = q_{i+1} + q_i$$

  y como $q_0 = q_1 = 1 \Longrightarrow q_i = f_i,\ \forall i \geq 0$, como pretendíamos. Además, $p_i = q_{i+2} - 1 = f_{i+2} - 1$.

- $D \equiv (1, 0, \dots, 0) = x^n$, es decir, $a_0 = 1,\ a_i = 0,\ \forall i \geq 1$. En éste caso, los p_i son los primeros números de Fibonacci.

  En efecto, las recurrencias (2) se convierten en:

  $$\begin{aligned} q_i &= p_{i-2},\ i \geq 2,\ q_0 = 1,\ q_1 = 0 \\ p_i &= q_i + p_{i-1},\ i \geq 1,\ p_0 = 1 \end{aligned}$$

  Así, $p_1 = q_1 + p_0 = 0 + 1 = 1$, es decir, $p_0 = p_1 = 1$, y si $i \geq 2$, tenemos

  $$p_i = q_i + p_{i-1} = p_{i-2} + p_{i-1} \Longrightarrow p_i = f_i$$

  como pretendíamos.

3.3. Caso general

Si el divisor no es mónico, es decir, del tipo $d = ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, podemos reducirlo al caso estudiado con la siguiente regla, sencilla de comprobar

$$\begin{array}{c|c} p & ax^2 + bx + x \\ \hline r & q \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c} p & x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \\ \hline r_1 & q_1 \end{array}$$

Entonces

$$q = \frac{q_1}{a}, \; r = r_1$$

Veamos un ejemplo, sea $D = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 9$, $d = 2x^2 + x + 1$. Sea $d' = x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \Longrightarrow a = b = -\frac{1}{2}$. Entonces

	1	-3	5	-7	9
$q_n(-1/2)$	1	-3	$9/2$	$-21/4$	$47/8$
$p_n(-1/2)$	1	$-7/2$	$25/4$	$-67/8$	

luego

$$q_1 = x^2 - \frac{7x}{2} + \frac{25}{4}, \quad r_1 = -\frac{67}{8}x + \frac{47}{8}$$

y por tanto

$$q = \frac{x^2}{2} - \frac{7x}{4} + \frac{25}{8}, \quad r = -\frac{67}{8}x + \frac{47}{8}$$