Algoritmo para el cálculo del interés

Pedro González Ruiz

diciembre de 2015

1. Introducción

La fórmula general utilizada en el programa es:

$$v(1+i)^n + p(1+it)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i} + f = 0 \tag{1}$$

donde

$$\begin{aligned} v &= \text{valor actual} \\ i &= \text{tanto por uno de interés} \\ p &= \text{pago} \\ n &= \text{número de años} \\ t &= \text{modo} = \begin{cases} 0, & \text{pagos al final} \\ 1, & \text{pagos al comienzo} \end{cases} \end{aligned}$$

Números negativos indican cantidades a pagar y positivos, a recibir. Si m es la partición del año, en la fórmula anterior debemos sustituir $n \to n\cdot m$ e $i \to \dfrac{i}{m}$.

Se supone que v, p, t, f, n son datos y lo que pretendemos es calcular i. Como no podemos despejar i en (1), es necesario recurrir a métodos aproximados para conseguirlo. En todo lo que sigue suponemos $i \geq 0$.

Para sentirnos más cómodos, cambiamos $i \to x$, con lo que (1) queda como:

$$v(1+x)^n + p(1+xt)\cdot\frac{(1+x)^n-1}{x} + f = 0,\ x \geq 0 \tag{2}$$

Desarrollando y agrupando en (2), resulta:

$$(v+pt)(1+x)^n + p\cdot\frac{(1+x)^n-1}{x} + (f-pt) = 0 \tag{3}$$

1.1. Regla 1

Cambiamos $v+pt \to v$ y $f-pt \to f$, con lo cual, la ecuación a estudiar es:

$$v(1+x)^n + p\cdot\frac{(1+x)^n-1}{x} + f = 0 \tag{4}$$

que es idéntica a (2) para $t=0$. De esta forma, eliminamos el engorro del t.

1.2. Regla 2

Si $((v > 0) \wedge (p > 0) \wedge (f > 0)) \vee ((v < 0) \wedge (p < 0) \wedge (f < 0))$, resulta evidente que (4) no tiene solución. Por consiguiente, esta condición debe verificarse antes de comenzar. En definitiva, en la terna (v, p, f), al menos uno de ellos debe tener distinto signo de alguno de los otros dos.

1.3. Regla 3

Tomando límites cuando $x \to 0^+$ en (4), resulta (ya que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = n$):

$$v + np + f = 0$$

En conclusión, si $v + np + f = 0 \Longrightarrow x = 0$ (problema resuelto). Para ser honrados, hemos demostrado el recíproco, es decir, si $x = 0 \Longrightarrow v + np + f = 0$. No está clara la afirmación primera, necesita más estudio, no obstante, la vamos a dar por buena, de momento.

1.4. Regla 4

El caso $n = 0$, aunque trivial, hay que tenerlo en cuenta. Si es $n = 0$, resulta (tanto si $x > 0$ como si $x = 0$) que:

$$v + f = 0$$

En conclusión, si $n = 0$, ha de ser $v + f = 0$. Si esto no se cumple, error.

2. Casos particulares

Para agilizar los cálculos, ciertos casos particulares deben ser estudiados aparte del caso general.

- $v = 0$. En este caso, (4) queda como:

$$p \cdot \frac{(1+x)^n - 1}{x} + f = 0 \tag{5}$$

  Como es evidente, p y f tienen que ser de distinto signo, es decir, $pf < 0$, si no, el problema no tiene solución. Organizamos (5), cambiando el signo, si es necesario, de forma que $f > 0$, y por tanto:

$$g(x) = f - p \cdot \frac{(1+x)^n - 1}{x}, \quad p > 0, \quad g(0^+) = f - np \tag{6}$$

  Las ecuaciones (6) corresponden a un ahorro, en el que todos los períodos ingreso p, sin imposición inicial (puesto que $v = 0$) para obtener un valor final f. Por consiguiente:

$$\text{dinero que ingreso} + \text{intereses producidos} = \text{dinero que me llevo}$$

  o bien

$$np + I = f \Longrightarrow f - np = I > 0 \Longrightarrow g(0^+) = f - np > 0$$

Por el binomio de Newton:

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \Longrightarrow \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j+1} x^j$$

y por tanto

$$g(x) = f - np - p \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j+1} x^j$$

Luego g debe volverse negativa en algún momento. Hay cambio de signo sin problemas. Todo consiste en tomar x suficientemente grande. El algoritmo es:

```
x0 = 0;
y0 = f-n*p; // debe ser y0 > 0
while (y0 > 0) {
  previo = y0;
  x0 = x0 + epsilon;
  y0 = g(x0);
}
// en este punto (x0,y0) es tal que y0 < 0.
// El intervalo donde hay cambio de signo es
x1 = x0;
y1 = y0;
x0 = x0 - epsilon;
y0 = previo;
// en este punto aplicar el metodo de la biseccion en el intervalor ]x0,x1[
```

- $p = 0$. En este caso, (4) queda como:

$$v(1+x)^n + f = 0 \tag{7}$$

Obviamente, $v \cdot f < 0$, si no, el problema no tiene solución. En éste caso, podemos despejar la x directamente, es decir:

$$x = \left(-\frac{f}{v}\right)^{1/n} - 1$$

Si después de calcular x según la fórmula anterior, resulta $x < 0$, el problema no tiene solución.

- $f = 0$. En este caso, (4) queda como:

$$v(1+x)^n + p \cdot \frac{(1+x)^n - 1}{x} = 0 \tag{8}$$

Como siempre, $p \cdot v < 0$, si no, el problema no tiene solución. Suponiendo lo anterior, organizamos (8), cambiando el signo, si es necesario, de forma que $v > 0$, y por tanto:

$$v(1+x)^n - p \cdot \frac{(1+x)^n - 1}{x} = 0, \quad v, p > 0 \tag{9}$$

La ecuación (9) es el clásico préstamo (ya que $f = 0$). Sea

$$g(x) = v(1+x)^n - p \cdot \frac{(1+x)^n - 1}{x} = 0, \quad x \geq 0, \quad g(0^+) = v - np \tag{10}$$

Ahora bien:

$$\text{Lo que he pagado} = \text{dinero prestado} + \text{intereses que me han cobrado}$$

o bien

$$np = v + I \Longrightarrow v - np = -I < 0 \Longrightarrow g(0^+) = v - np < 0$$

Mirando (10), vemos que g es un polinomio de grado n, con coeficiente líder v positivo, ya que $\frac{(1+x)^n-1}{x}$ es un polinomio de grado $n-1$, luego, tarde o temprano, g es positiva, y por tanto, hay un cambio de signo. El algoritmo, similar al anterior es:

```
x0 = 0;
y0 = v-n*p; // debe ser y0 < 0
while (y0 < 0) {
  previo = y0;
  x0 = x0 + epsilon;
  y0 = g(x0);
}
// en este punto (x0,y0) es tal que y0 > 0.
// El intervalo donde hay cambio de signo es
x1 = x0;
y1 = y0;
x0 = x0 - epsilon;
y0 = previo;
// en este punto aplicar el metodo de la biseccion en el intervalor ]x0,
   x1[
```

3. Caso general

Directamente (4). Si hemos llegado hasta aquí, sabemos que no puede ocurrir que $((v > 0) \wedge (p > 0) \wedge (f > 0)) \vee ((v < 0) \wedge (p < 0) \wedge (f < 0))$, lo cual no garantiza la existencia de solución. En fin, sea:

$$g(x) = v(1+x)^n + p \cdot \frac{(1+x)^n - 1}{x} + f, \quad g(0^+) = v + np + f \neq 0$$

El algoritmo es:

```
x0 = 0;
y0 = v + n*p + f;
epsilon = 1/(100*particion); // ir de 1 en 1
csigno = false;
limsupx = 5/particion; // llegar hasta el 500%
// sin la primera condicion del while que sigue, el bucle podria ser
   infinito
while ((x0 <= limsupx) && (!csigno)) {
  previo = y0;
  x0 = x0 + epsilon;
  y0 = fgeneral(v,p,n,f,x0);
  if (y0 * previo < 0) { // cambio de signo
    csigno = true;
  }
}
if (!csigno) { // no se ha encontrado el cambio del signo
  // acciones pertinentes
```

```
  }
  x1 = x0;
  y1 = y0;
  x0 = x1 - epsilon;
  y0 = previo;
  // en [x0,x1] la funcion tiene un cambio de signo
```

donde `fgeneral` es g.

4. Observaciones

1. Sabemos que si $n = 0 \Longrightarrow v + f = 0$. Al revés no es cierto. En efecto, supongamos que $pv < 0$ y tomemos $x = -\frac{p}{v}$. Sustituyendo en (4):

   $$v(1+x)^n + p \cdot \left(-\frac{v}{p}\right)\left[(1+x)^n - 1\right] + f = 0 \Longrightarrow v(1+x)^n - v\left[(1+x)^n - 1\right] + f = 0 \Longrightarrow v + f = 0$$

   En otras palabras, si $pv < 0 \ \wedge \ x = -\frac{p}{v} \Longrightarrow v + f = 0$, independientemente del número de años.