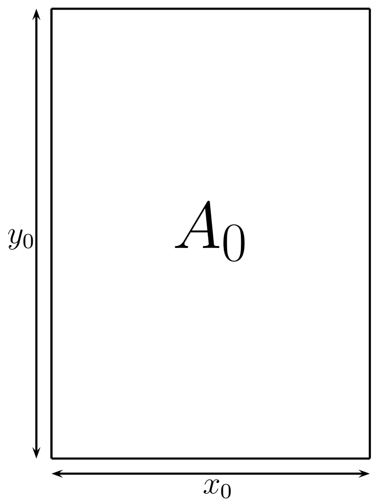
Notas formatos DIN

Pedro González Ruiz

febrero de 2009

1. Formatos de papel DIN

El papel base a partir del cual se construyen todos los demás es el DIN A_0, A_0 para simplificar. Es un rectángulo de superficie 1 m^2 y de forma tal que la proporción entre el alto y la base es el número $\sqrt{2}$. Estos son los datos que deben memorizarse, pues todos los demás, con mínimos conocimientos matemáticos pueden deducirse a partir de ellos. En estos apuntes, para una correcta orientación del papel, la longitud de la base, denotada como x_0 será siempre el lado más pequeño del rectángulo, y la altura, denotada como y_0 será el más grande (ver figura):



La definición dada equivale al sistema

$$\begin{cases} x_0 y_0 = 1 \\ \dfrac{y_0}{x_0} = \sqrt{2} \end{cases} \tag{1}$$

Para simplificar aún más, un A_0 lo escribiremos como un par, la 1ª componente es la base y la 2ª la altura. Es decir, $A_0 = (x_0, y_0)$.

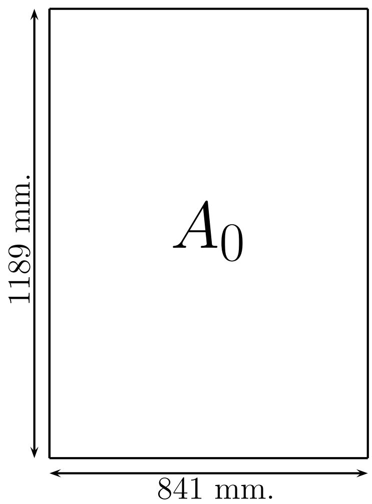
Resolvamos ahora el sistema (1). Como $\dfrac{y_0}{x_0} = \sqrt{2} \Longrightarrow y_0 = x_0\sqrt{2}$. Sustituyendo en $x_0 y_0 = 1$:

$$x_0\sqrt{2}x_0 = 1 \Longrightarrow x_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \Longrightarrow y_0 = \frac{1}{x_0} = \sqrt[4]{2}$$

luego

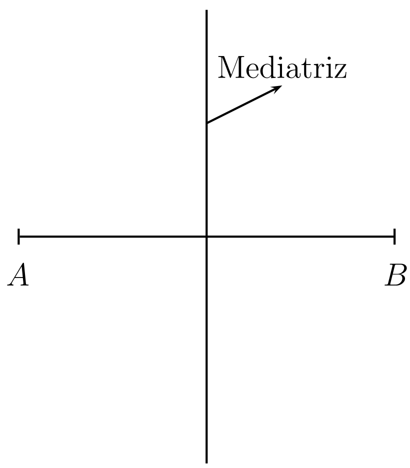
$$A_0 = (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \sqrt[4]{2}\right)$$

También
$$x_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \text{ m.} = 0'84089 \text{ m.} = \{\text{pasando a mm.}\} = 840'89 \text{ mm.}$$
y redondeando al entero más próximo, $x_0 = 841$ mm. Para la medida vertical:
$$y_0 = \sqrt[4]{2} \text{ m.} = 1'189207 \text{ m.} = \{\text{pasando a mm.}\} = 1189'207 \text{ mm.}$$
y redondeando al entero más próximo, $y_0 = 1189$ mm. En definitiva,

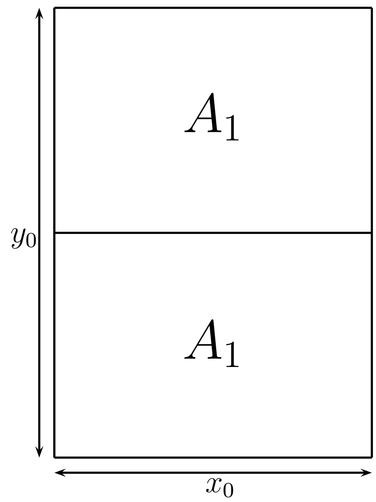


1.1. Subdivisiones del A_0

Recordamos aquí que la mediatriz de un segmento AB es la recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio. En concreto,



Si dividimos un A_0 por la mediatriz del segmento vertical que define y_0, obtenemos dos rectángulos, y por definición, cada uno de ellos es un A_1 (ver figura):



La base de un $A1$ es $y_0/2$ y la altura es x_0, que según nuestro convenio previo, de escribir primero el más pequeño y a continuación el más grande, sería:

$$A_1 = \left(\frac{y_0}{2}, x_0\right)$$

Consideremos el siguiente diagrama:

$$A_0 = (x_0, y_0) \longrightarrow A_1 = \left(\frac{y_0}{2}, x_0\right)$$

Fijémonos como pasamos de un A_0 a un A_1, en primer lugar permutando las coordenadas y en segundo lugar, dividiendo la 1ª por 2, en concreto:

$$A_0 = (x_0, y_0) \xrightarrow{\text{permutar}} (y_0, x_0) \xrightarrow{\text{dividir la 1ª por 2}} A_1 = \left(\frac{y_0}{2}, x_0\right)$$

Si hacemos con el A_1 lo mismo que hicimos con el A_0, obtenemos el A_2, es decir:

$$A_1 = \left(\frac{y_0}{2}, x_0\right) \xrightarrow{\text{permutar}} \left(x_0, \frac{y_0}{2}\right) \xrightarrow{\text{dividir la 1ª por 2}} A_2 = \left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$$

Una más:

$$A_2 = \left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right) \xrightarrow{\text{permutar}} \left(\frac{y_0}{2}, \frac{x_0}{2}\right) \xrightarrow{\text{dividir la 1ª por 2}} A_3 = \left(\frac{y_0}{4}, \frac{x_0}{2}\right)$$

y la última:

$$A_3 = \left(\frac{y_0}{4}, \frac{x_0}{2}\right) \xrightarrow{\text{permutar}} \left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{4}\right) \xrightarrow{\text{dividir la 1ª por 2}} A_4 = \left(\frac{x_0}{4}, \frac{y_0}{4}\right)$$

y así sucesivamente. En general, las expresiones generales son:

$$A_{2k} = \left(\frac{x_0}{2^k}, \frac{y_0}{2^k}\right), \quad k \geq 0 \tag{2}$$

$$A_{2k+1} = \left(\frac{y_0}{2^{k+1}}, \frac{x_0}{2^k}\right), \quad k \geq 0 \tag{3}$$

Veamos algunos ejemplos. Calculemos los tamaños de un A_4, A_7, A_8 y un A_9.

- Tomemos $k = 2$ en (2),

$$A_4 = \left(\frac{x_0}{4}, \frac{y_0}{4}\right) = \left(\frac{841}{4}, \frac{1189}{4}\right) = (210'25, 297'25) = \{\text{redondeando}\} = (210, 297) \text{ mm.}$$

luego un A_4 tiene las dimensiones 210×297 mm.

- Tomemos $k = 3$ en (3),

$$A_7 = \left(\frac{y_0}{2^4}, \frac{x_0}{2^3}\right) = \left(\frac{1189}{16}, \frac{841}{8}\right) = (74'31, 105'12) = \{\text{redondeando}\} = (74, 105) \text{ mm.}$$

luego un A_7 tiene las dimensiones 74×105 mm.

- Tomemos $k = 4$ en (2),

$$A_8 = \left(\frac{x_0}{2^4}, \frac{y_0}{2^4}\right) = \left(\frac{841}{16}, \frac{1189}{16}\right) = (52'562, 74'31) = \{\text{redondeando}\} = (53, 74) \text{ mm.}$$

luego un A_8 tiene las dimensiones 53×74 mm.

- Finalmente, tomemos $k = 4$ en (3),

$$A_9 = \left(\frac{y_0}{2^5}, \frac{x_0}{2^4}\right) = \left(\frac{1189}{32}, \frac{841}{16}\right) = (37'156, 52'56) = \{\text{redondeando}\} = (37, 53) \text{ mm.}$$

luego un A_9 tiene las dimensiones 37×53 mm.

Las expresiones (2) y (3) pueden unirse en una sola. Para ello, pensemos en cada $A_n = (x_n, y_n)$ como un vector y consideremos la ley habitual de multiplicación por escalares:

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Por un lado

$$\frac{y_0}{x_0} = \sqrt{2} \Longrightarrow y_0 = x_0\sqrt{2} \Longrightarrow \frac{y_0}{2} = \frac{x_0\sqrt{2}}{2} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$$

y por otro

$$\frac{y_0}{x_0} = \sqrt{2} \Longrightarrow x_0 = \frac{y_0}{\sqrt{2}}$$

luego

$$A_1 = \left(\frac{y_0}{2}, x_0\right) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{2}}, \frac{y_0}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}A_0$$

En otras palabras, un A_1 es el resultado de la homotecia de razón $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ de un A_0. Análogamente $A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}A_1$, etc.., lo que nos viene a decir que la sucesión de vectores

$$A_0, A_1, A_2, \ldots$$

forman una progresión geométrica vectorial de razón $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y término inicial A_0. Aplicando la fórmula general del término n-ésimo, resulta

$$A_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n A_0 = \frac{1}{2^{n/2}}A_0, \quad n \geq 0 \tag{4}$$

La sencilla (4) equivale a (2) y (3) juntas. Volviendo a recordar las propiedades de las progresiones geométricas:

$$A_n = A_k \cdot r^{n-k} \Longrightarrow A_n = A_k \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-k} \tag{5}$$

La expresión (5) ayudará a comprender ciertas manipulaciones posteriores utilizadas en las imposiciones. Por ejemplo, fijemos $k = 4$, entonces, (5) se convierte en

$$A_n = A_4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-4} \tag{6}$$

Si queremos hacer una imposición a 4 páginas en un A_4, tal y como se explica en la página Web, ejemplo 1º, entonces $n = 6$, y (6) se convierte en

$$A_6 = A_4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}A_4 = 0'5 \cdot A_4$$

es decir, hemos de aplicar un factor de escala (= razón de homotecia) de $0'5$ en un A_4.

Análogamente, si queremos hacer una imposición a 8 páginas en un A_4, tal y como se explica en la página Web, ejemplo 2º, entonces $n = 7$, y (6) se convierte en

$$A_6 = A_4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}A_4 = 0'354 \cdot A_4$$

es decir, la razón de homotecia en este caso es de $0'354$.

Es difícil de entender el significado de los números en el programa `pstops` que manejaremos posteriormente, si, previamente, como estamos haciendo aquí, no aclaramos el porqué de las cosas.

El lector puede detener aquí la lectura si lo desea y seguir en la página Web. Lo que sigue es una curiosidad matemática, interesante para aquellos que posean conocimientos de teoría de números. En concreto, las aproximaciones de la base y altura de un A_0 son:

$$x_0 \approx 841 = 29^2, \quad y_0 \approx 1\,189 = 29 \cdot 41$$

luego $\sqrt{2} = \dfrac{y_0}{x_0} \approx \dfrac{29 \cdot 41}{29^2} = \dfrac{41}{29}$, es decir, la fracción $\dfrac{41}{29}$ es una aproximación de $\sqrt{2}$, y lo que vamos a demostrar es que dicha fracción es una **reducida** de $\sqrt{2}$, y, por consiguiente, una aproximación óptima.

Dado un número real x, la parte entera de x, denotada como $\lfloor x \rfloor$ (suelo de x), es el mayor entero $\leq x$. Recordemos ahora cómo cualquier número irracional ξ_0 puede desarrollarse en fracción continua infinita. Sea $a_0 = \lfloor \xi_0 \rfloor$, y a partir de aquí, aplicamos la recurrencia:

$$\xi_{n+1} = \frac{1}{\xi_n - a_n}, \quad a_{n+1} = \lfloor \xi_{n+1} \rfloor, \quad n \geq 0$$

En concreto:

$$\xi_1 = \frac{1}{\xi_0 - a_0} \Longrightarrow \xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1} \tag{7}$$

Otra vez,

$$\xi_2 = \frac{1}{\xi_1 - a_1} \Longrightarrow \xi_1 = a_1 + \frac{1}{\xi_2}$$

Sustituyendo en (7):

$$\xi_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{\xi_2}} \tag{8}$$

Una vez más,

$$\xi_3 = \frac{1}{\xi_2 - a_2} \Longrightarrow \xi_2 = a_2 + \frac{1}{\xi_3}$$

Sustituyendo en (8):

$$\xi_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\xi_3}}}$$

En fin, reiterando, resulta:

$$\xi_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} \tag{9}$$

que es el desarrollo de ξ_0 en fracción continua. La parte derecha de (9) es incómoda de escribir, razón por la cual se suele denotar como $\langle a_0, a_1, a_2 \ldots \rangle$, luego

$$\xi_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} = \langle a_0, a_1, a_2 \ldots \rangle$$

Como ejemplo práctico, apliquemos el método general para desarrollar $\xi_0 = \sqrt{2}$ en fracción continua,

$$\xi_0 = \sqrt{2} \Longrightarrow a_0 = \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 1$$

luego

$$\xi_1 = \frac{1}{\xi_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 \Longrightarrow a_1 = \lfloor \xi_1 \rfloor = \left\lfloor 1 + \sqrt{2} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = 2$$

Reiterando

$$\xi_2 = \frac{1}{\xi_1 - a_1} = \frac{1}{1 + \sqrt{2} - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Nos vuelve a salir ξ_1, por tanto, las iteraciones se repiten, y, en consecuencia $a_n = 2$, para todo $n \geq 1$, y por tanto

$$\sqrt{2} = \langle 1, 2, 2, 2, \ldots \rangle = \left\langle 1, \overline{2} \right\rangle$$

donde la barra encima del 2 indica (al igual que con los números racionales) que éste se repite indefinidamente. Un teorema de Lagrange afirma que un desarrollo $\xi_0 = \langle a_0, a_1, a_2 \ldots \rangle$ es periódico si y solo si ξ_0 es un irracional cuadrático, como nos ocurre a nosotros, ya que $\sqrt{2}$ lo es.

Siguiendo la teoría general, a partir de la sucesión $\{a_0, a_1, \ldots, \}$ se forman las $\{h_n\}$ y $\{k_n\}$ definidas como:

$$\begin{aligned} h_{-2} = 0,\ h_{-1} = 1, \quad h_n = a_n h_{n-1} + h_{n-2},\ n \geq 0 \\ k_{-2} = 1,\ k_{-1} = 0, \quad k_n = a_n k_{n-1} + k_{n-2},\ n \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Se comprueba que m.c.d $(h_n, k_n) = 1$, luego, la fracción $r_n = \dfrac{h_n}{k_n}$ es irreducible y se llama la n-ésima reducida. También

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \xi_0$$

y, en cierto sentido (ver teoría general), las fracciones r_n forman una sucesión de **aproximaciones óptimas** para el irracional ξ_0. En fin, para nuestro caso, dispongamos los cálculos en forma de tabla y apliquemos las recurrencias (10):

n	-2	-1	0	1	2	3	4
a_n	–	–	1	2	2	2	2
h_n	0	1	1	3	7	17	41
k_n	1	0	1	2	5	12	29

es decir

$$r_4 = \frac{h_4}{k_4} = \frac{41}{29}$$

como pretendíamos.