Selectividad Matemáticas II, julio 2022, Andalucía (versión 2)

Pedro González Ruiz

13 de julio de 2022

Problema 1 Calcular a sabiendo que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3+2x} = 1$$

donde ln denota la función logaritmo neperiano.

Está claro que $a \neq 0$, pues si $a = 0$, el límite sería 0 y no 1 como exige el enunciado. Dividiendo por x numerador y denominador

$$1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{2+\dfrac{(\ln x)^3}{x}} = \frac{a}{2+\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^3}{x}} \tag{1}$$

En fin

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x} &= \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \{\text{L'Höpital}\} = 3\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}}{1} = 3\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = \\
&= \{\text{otra vez}\} = 6\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{1} = 6\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \\
&= \{\text{una última vez}\} = 6\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 6\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 6\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (1):

$$1 = \frac{a}{2} \Longrightarrow a = 2$$

Aquí damos por acabado el problema. El lector puede generalizar observando que para todo $k \in \mathbb{Z}$ $(k \geq 0)$ es

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^k}{x} = 0 \tag{2}$$

ya que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^k}{x} = \{\text{L'Höpital}\} = k\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{k-1}\cdot\frac{1}{x}}{1} = k\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{k-1}}{x}$$

y este límite es el mismo que el de partida, salvo que tiene el exponente disminuido en una unidad, con lo que reiterando llegamos a

$$k(k-1)\cdots 2\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^1}{x} = k!\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = k!\cdot 0 = 0$$

la expresión (2) nos muestra que la función $f(x) = x$ tiende más rápidamente a $+\infty$ que cualquier potencia del logaritmo.

Problema 2 Calcular los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

La gráfica de f es una parábola (polinomio de segundo grado). Por tanto, con conocer los cortes con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad es suficiente para dibujarla. Aparte de esto, f es par, y por tanto, simétrica respecto al eje de ordenadas. Sea $y = f(x) = -x^2 + 12$, En fin

$$y = 0 \Longrightarrow x^2 = 12 \Longrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$$

con lo que los cortes con el eje X son $(-2\sqrt{3}, 0)$ y $(2\sqrt{3}, 0)$. Al revés, si $x = 0 \Longrightarrow y = 12$, el corte con el eje Y es el punto $(0, 12)$. Más cosas

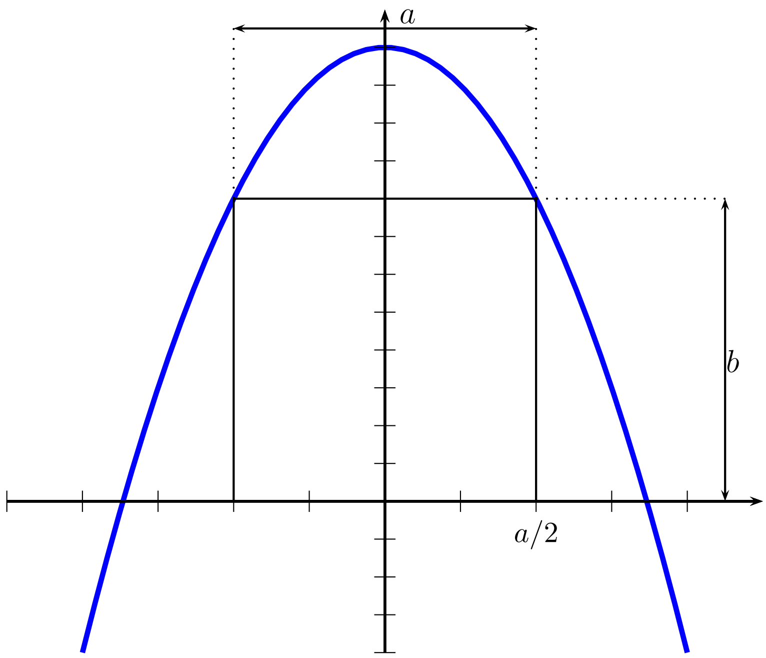
$$f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

y por tanto, el vértice de la parábola es el punto $V(0, 12)$. Por último

$$f''(x) = -2 < 0 \Longrightarrow f \text{ es cóncava}$$

y en consecuencia, V es un máximo.

Sean (ver figura que sigue)



$$a = \text{longitud de la base del rectángulo inscrito}$$
$$b = \text{longitud de la altura del rectángulo inscrito}$$

La función a maximizar es $S = a \cdot b$. El vértice superior derecho del rectángulo tiene de coordenadas $\big(a/2, b\big)$, luego

$$b = f\left(\frac{a}{2}\right) = 12 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Esta es la ecuación de condición. La función a maximizar es (cambiamos S por $S(a)$):

$$S(a) = a\left(12 - \frac{a^2}{4}\right) = 12a - \frac{a^3}{4}$$

Derivando y simplificando (si el lector no se encuentra cómodo con a como variable, cámbiela por x en la expresión anterior y al final vuelva a cambiar la x por a):

$$S'(a) = 12 - \frac{3a^2}{4} \Longrightarrow 12 - \frac{3a^2}{4} = 0 \Longrightarrow a^2 = 16 \Longrightarrow a = \pm 4$$

Descartamos $a = -4$ ya que una distancia es siempre positiva. Derivando otra vez

$$S''(a) = -\frac{3a}{2} \Longrightarrow S''(4) = -\frac{3 \cdot 4}{2} = -6 < 0$$

luego $a = 4$ es un máximo. Sustituyendo en b

$$b = 12 - \frac{a^2}{4} = 12 - \frac{16}{4} = 8$$

El área es, por tanto

$$S = 8 \cdot 4 = 32$$

y los vértices del rectángulo son

$$(2, 0),\ (2, 8),\ (-2, 8),\ (-2, 0)$$

Problema 3 Calcular

$$I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\, dx$$

Sugerencia: efectuar el cambio de variable $t = \sqrt{1+x} - 1$.

Seguimos la sugerencia, y hacemos el cambio de variable

$$t = \sqrt{1+x} - 1 \Longrightarrow 1 + t = \sqrt{1+x} \Longrightarrow 1 + x = (1+t)^2 \Longrightarrow x = t^2 + 2t$$

y por tanto $dx = (2t+2)\, dt = 2(t+1)\, dt$. También, si $x = 3 \Longrightarrow t = \sqrt{1+3} - 1 = 1$ y si $x = 8 \Longrightarrow t = \sqrt{1+8} - 1 = 2$, luego

$$I = \int_1^2 \frac{2(t+1)}{t}\, dt = 2\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = 2\left[t + \ln t\right]_1^2 = 2(2 + \ln 2 - 1 - \ln 1) =$$
$$= 2(1 + \ln 2)$$

En conclusión

$$I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}\, dx = 2(1 + \ln 2)$$

Problema 4 Consideremos las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

1. Calcular los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esbozar sus gráficas.
2. Determinar el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante.

Comencemos estudiando la función $y = f(x)$. Para empezar los cortes con los ejes. Si $x = 0 \Longrightarrow y = 2$, luego el corte con el eje Y es $(0, 2)$. Al revés, si $y = 0 \Longrightarrow x^3 + 2 = 0 \Longrightarrow x^3 = -2 \Longrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$, luego un corte con el eje X es $(-\sqrt[3]{2}, 0)$. Al margen de este puede haber otros, ya que un polinomio de grado 3 puede tener hasta 3 raíces. Ahora mismo veremos que no, es decir, que no hay más cortes con el eje X. En efecto, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, luego f crece en todo $\mathbb{R}$ y no puede haber por tanto más cortes con el eje X. Por otro lado, $f'(x) = 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$, con lo que tenemos un candidato a extremo. También $f''(x) = 6x \Longrightarrow f''(0) = 0$, y la segunda derivada no nos saca de dudas respecto al extremo, aunque, si $x < 0 \Longrightarrow f''(x) < 0$, con lo que f es cóncava en el intervalo $]-\infty, 0[$ y convexa en $]0, +\infty[$, con lo que el punto $(0, 2)$ no es un extremo, sino un punto de inflexión.

La gráfica de $y = g(x)$ es una parábola (polinomio de segundo grado). Por tanto, con conocer los cortes con los ejes, el vértice y la concavidad o convexidad es suficiente para dibujarla. Comencemos con los cortes

$$y = 0 \Longrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos $x = 1 \pm \sqrt{3}$, con lo que los cortes con el eje X son $(1 + \sqrt{3}, 0)$ y $(1 - \sqrt{3}, 0)$. Al revés, si $x = 0 \Longrightarrow y = 2$, el corte con el eje Y es el punto $(0, 2)$. Más cosas

$$g'(x) = -2x + 2 = -2(x - 1) = 0 \Longrightarrow x = 1$$

y por tanto, el vértice de la parábola es el punto $V(1, 3)$. Por último

$$g''(x) = -2 < 0 \Longrightarrow g \text{ es cóncava}$$

y en consecuencia, V es un máximo.

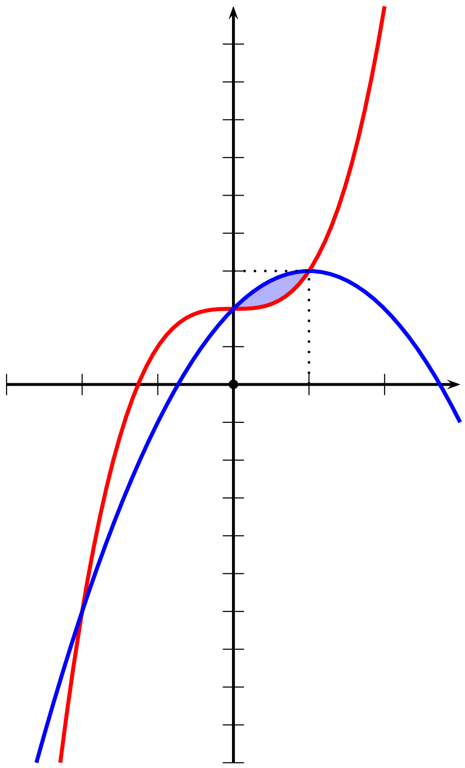
Para acabar el apartado primero, calculemos los puntos de corte de ambas curvas. Para ello

$$x^3 + 2 = -x^2 + 2x + 2 \Longrightarrow \{\text{simplificando}\} \Longrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$$

es decir, $x = 0$ o $x^2 + x - 2 = 0$. Resolviendo esta cuadrática obtenemos $x = 1, -2$. Si $x = 0 \Longrightarrow y = 0^3 + 2 = 2$. Si $x = 1 \Longrightarrow y = 1^3 + 2 = 3$ y si $x = -2 \Longrightarrow y = (-2)^3 + 2 = -8 + 2 = -6$, luego los puntos comunes a ambas curvas son

$$(0, 2)\ (1, 3) \text{ y } (-2, -6)$$

Las gráficas de ambas funciones junto con el recinto son



La superficie S del recinto que nos piden es:

$$S = \int_0^1 \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = \int_0^1 (-x^2 + 2x + 2 - x^3 - 2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$
$$= -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

Problema 5 Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinar los valores de a para los que la matriz no tiene inversa.
2. Para $a = 1$, calcular X tal que $AXB = C$, si es posible.

Aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4a + 2 - 2a^2 - 2 = \{\text{simplificando}\} = -2a(a-2)$$

y por tanto $|B| = 0 \iff a = 0, 2$, que son los valores para los que no existe la inversa de B.

Entramos en la segunda parte. Para $a = 1$, existe B^{-1}. También, existe A^{-1}, ya que $|A| = 1$. Despejemos X en $AXB = C$. Multiplicando por A^{-1} a la izquierda resulta $XB = A^{-1}C$. Finalmente, multiplicando por B^{-1} a la derecha, obtenemos $X = A^{-1}CB^{-1}$. Así pues, está claro, hemos de hallar las inversas de A y B y hacer la multiplicación anterior. Tenemos:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Para $a = 1 \Longrightarrow |B| = -2(1-2) = 2$, luego

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -20 & 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Concluyendo

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 6 Sabemos que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$$

1. Calcular $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$

2. Hallar $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$

Escribimos a continuación las reglas que vamos a utilizar

1. Para multiplicar un determinante por un número se multiplica cualquier fila o columna por dicho número.
2. El valor de un determinante no cambia si a cualquier fila (columna) se le suma una combinación lineal de las otras filas (columnas).
3. Si se intercambian dos filas (columnas) el valor del determinante cambia de signo.
4. El determinante de una matriz es igual que el determinante de su matriz traspuesta.

En fin, resolvamos ya el problema. Sea

$$v = \begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = \{\text{por la regla 1}\} = (2)\cdot(-3)\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ p & r & q \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{Cambiamos las columnas 2 y 3, regla 3}\} = 6\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{Cambiamos las filas 2 y 3, regla 3}\} = -6\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-6)\cdot(-2) = 12$$

Veamos la segunda parte. Sea

$$v = \begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = \{\text{por la regla 1}\} = (-2)\begin{vmatrix} x & a-3p & a \\ y & b-3q & b \\ z & c-3r & c \end{vmatrix}$$

Por la regla 2, restamos a la segunda columna la tercera (es decir, sumamos a la segunda columna la tercera multiplicada por -1)

$$v = (-2)\begin{vmatrix} x & -3p & a \\ y & -3q & b \\ z & -3r & c \end{vmatrix} = \{\text{por la regla 1}\} = 6\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} = \{\text{por la regla 4}\} =$$

$$= 6\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} = \{\text{Cambiamos las filas 1 y 3, regla 3}\} = -6\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-6)\cdot(-2) = 12$$

Problema 7 Consideremos las rectas

$$r \equiv x+1 = y-a = -z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 5+2t \\ y = -3 \\ z = 2-t \end{cases}$$

1. Calcular a para que r y s se corten. Determinar el punto de corte.
2. Hallar la ecuación π del plano que pasa por $P(8,-7,2)$ y que contiene a la recta s.

Para la primera parte, es conveniente expresar las rectas en forma punto-vector director. En fin, parametrizamos r:

$$x+1 = y-a = -z = t \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= -1+t \\ y &= a+t \\ z &= -t \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \begin{cases} P(-1,a,0) \\ \vec{u} = (1,1,-1) \end{cases}$$

Trivialmente

$$s \equiv \begin{cases} Q(5,-3,2) \\ \vec{v} = (2,0,-1) \end{cases}$$

Según la teoría, las rectas se cortan cuando es nulo el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{PQ} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{vmatrix} = 0$$

es decir

$$\begin{vmatrix} 6 & -3-a & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{regla de Sarrus}\} = -6 + 2(a+3) - 4 - (a+3) = 0$$

Resolviendo la ecuación lineal de primer grado que se obtiene después de simplificar, obtenemos $a = 7$.

Para averiguar el punto de corte C, la recta r es

$$r \equiv x + 1 = y - 7 = -z \tag{3}$$

La segunda de s nos dice que $y = -3$. Elegimos la segunda y tercera de (3), luego $-3 - 7 = -z \Longrightarrow z = 10$. Ahora, primera y tercera de (3), luego $x + 1 = -10 \Longrightarrow x = -11$, con lo que el punto de corte de r y s es $C(-11, -3, 10)$.

Para la segunda parte (el punto P de ahora no tiene nada que ver con el P de la primera parte), recordamos que uno de los criterios para poder calcular la ecuación de un plano es conocer un punto y dos vectores independientes del plano. Un punto ya lo tenemos, que es el P del enunciado. Como $s \subset \pi$, el vector director $\vec{v}$ de s es también un vector director de π, y como $P, Q \in \pi \Longrightarrow \overrightarrow{PQ} = (-3, 4, 0)$ es otro vector director de π. La ecuación implícita de π es por tanto

$$\begin{vmatrix} x-8 & y+7 & z-2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y simplificando resulta

$$\pi \equiv 4x + 3y + 8z - 27 = 0$$

Problema 8 Sean el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv x = \dfrac{y}{3} = z - 1$

1. Calcular si existe el punto de intersección de π y r.

2. Dado el punto $Q(2, 6, 3)$, hallar su simétrico respecto del plano π.

Parametrizamos r

$$x = \frac{y}{3} = z - 1 = t \Longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Sustituyendo en π:

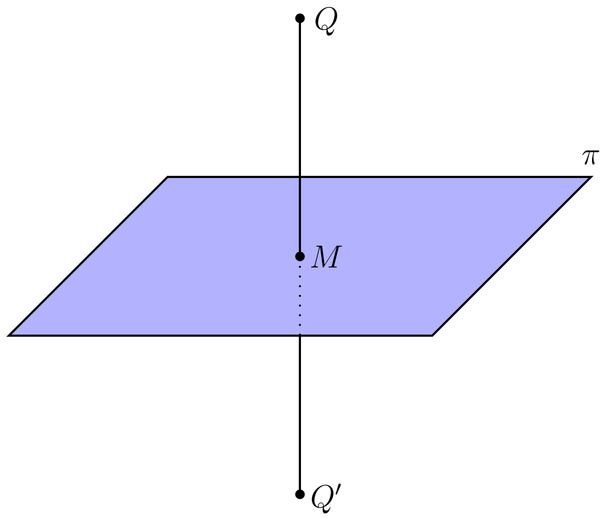
$$x + y - z = 2 \Longrightarrow t + 3t - (1 + t) = 2 \Longrightarrow t = 1$$

luego

$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{array}\right\} \Longrightarrow \{t = 1\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{array}\right\}$$

y, por tanto, el punto común de π y r es $P(1, 3, 2)$, o bien $\pi \cap r = \{P\}$.

Para la segunda parte, observemos la siguiente figura



Sea r la recta perpendicular a π que pasa por Q. El vector $\vec{n} = (1, 1, -1)$ formado por los coeficientes que acompañan a las x, y, z del plano π es, según se sabe por la teoría, perpendicular a π, y por tanto, un vector director de r, con lo cual

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 6 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en π determinamos M. Así pues

$$x + y - z = 2 \Longrightarrow 2 + t + 6 + t - 3 + t = 2 \Longrightarrow 3t + 3 = 0 \Longrightarrow t = -1$$

luego

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 6 + t \\ z = 3 - t \end{array}\right\} \Longrightarrow \{t = -1\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow M(1, 5, 4)$$

Finalmente, sea $Q'(a, b, c)$ el punto simétrico que vamos buscando. Como M es el punto medio del segmento QQ', tenemos

$$\frac{a+2}{2} = 1, \ \frac{b+6}{2} = 5, \ \frac{c+3}{2} = 4 \Longrightarrow a = 0, \ b = 4, \ c = 5$$

y por consiguiente, $Q'(0, 4, 5)$ es el simétrico que nos han pedido.

Veamos una segunda forma forma de hacer este apartado. Mantenemos las notaciones de la forma anterior. El punto Q' que buscamos está en la recta r, por tanto

$$Q'(2 + t, 6 + t, 3 - t) \tag{4}$$

Como Q' es el simétrico de Q respecto de Q respecto a π, es obvio que

$$d(Q, \pi) = d(Q', \pi)$$

siendo $d(Q,\pi)$ y $d(Q',\pi)$ las distancias de los puntos Q y Q' al plano π. En fin, utilizando la fórmula de la distancia de un punto a un plano

$$\begin{aligned} d(Q,\pi) &= \frac{|2+6-3-2|}{\sqrt{3}} \\ d(Q',\pi) &= \frac{|2+t+6+t-3+t-2|}{\sqrt{3}} = \frac{|3t+3|}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

luego

$$\frac{|3t+3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Longrightarrow |3t+3| = 3 \Longrightarrow |t+1| = 1 \Longrightarrow t+1 = \pm 1 \Longrightarrow t = 0, -2$$

Sustituyendo estos valores en (4) obtenemos $Q_1(2,6,3)$ y $Q_2(0,4,5)$, es decir, los dos puntos que son simétricos el uno del otro.