Selectividad Matemáticas II, julio 2023, Andalucía

Pedro González Ruiz

12 de julio de 2023

Problema 1 Sea la funcion $f : [-2, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ e^x \cos x & \text{si } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$$

1. Hallar los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
2. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{2}$.

La función f es continua en 0, pues

$$f(0^-) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} (5x + 1) = 5 \cdot 0 + 1 = 1$$
$$f(0^+) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} (e^x \cos x) = e^0 \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Derivando, resulta

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } -2 < x < 0 \\ e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) & \text{si } 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

Obervemos que **no existe** $f'(0)$ pues $f'(0^-) = 5$, $f'(0^+) = e^0(\cos 0 - \operatorname{sen} 0) = 1$. En los extremos locales ha de ser $f'(x) = 0$, y como $e^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, es:

$$\cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Longrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

Estos dos valores son nuestros candidatos a extremos. Derivamos una vez más

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 < x < 0 \\ -2e^x \operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

Ahora bien

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2e^{\pi/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}e^{\pi/4} < 0$$

luego $x = \dfrac{\pi}{4}$ es un máximo local de valor

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\pi/4} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}$$

También

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2e^{5\pi/4}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2\cdot e^{5\pi/4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{5\pi/4} > 0$$

luego $x = \dfrac{5\pi}{4}$ es un mínimo local de valor

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{5\pi/4}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi/4}$$

Como $f'(0^-) = 5$, f crece en un entorno pequeño a la izquierda del punto $x = 0$. También $f'(0^+) = 1$, luefo f crece también en un entorno pequeño a la derecha de dicho punto, y por tanto, $x = 0$ no es un extremo de f.

Por otro lado, $f'(x) = 5$ si $x \in]-2, 0[$, luego f crece en $]-2, 0[$, con lo que el punto $x = -2$ es un posible mínimo absoluto. Ahora bien

$$f(-2) = 5\cdot(-2) + 1 = -9,\ f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi/4} \approx -35{,}888\ldots$$

luego $x = -2$ no es un mínimo absoluto y $x = \dfrac{5\pi}{4}$ sí lo es.

También

$$f(2\pi) = e^{2\pi}\cos 2\pi = e^{2\pi} > f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}$$

luego $x = 2\pi$ es un máximo absoluto.

En conclusión

- El punto $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}\right)$ es un máximo local no absoluto.
- El punto $\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi/4}\right)$ es un mínimo local y absoluto.
- El punto $\left(2\pi, e^{2\pi}\right)$ es un máximo no local y absoluto.

Veamos la segunda parte. La recta tangente a f en un punto x_0 es $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. En nuestro caso

$$y = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Ahora bien

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2}\cdot 0 = 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{\pi/2}\cdot(0-1) = -e^{\pi/2}$$

luego

$$\text{recta tangente} \equiv y = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)e^{\pi/2}$$

Problema 2 Sea $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\cdot(\ln x)^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

1. Calcular, si existen, sus extremos **relativos** (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
2. Calcular, si existen, sus extremos **absolutos** (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Es evidente que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in]0, +\infty[$. Sea

$$l = f(0^+) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x(\ln x)^2 = 0 \cdot (-\infty)^2 = 0 \cdot (+\infty) \longrightarrow \text{indeterminado}$$

En el límite anterior, hacemos el cambio de variable $y = -\ln x \equiv x = e^{-y}$, luego

$$\begin{aligned} l = \lim_{y \to +\infty} e^{-y} y^2 &= \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2}{e^y} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \{\text{L'Höpital}\} = \lim_{y \to +\infty} \frac{2y}{e^y} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \\ &= \{\text{L'Höpital}\} = \lim_{y \to +\infty} \frac{2}{e^y} = \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Asíu pues, podemos extender el dominio de la función al punto $x = 0$, definiendo $f(0) = 0$, y por tanto, el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$ es un mínimo absoluto de la función, ya que, según se comentó al principio, f es positiva (este estudio del comportamiento de la función en el punto 0 no es necesario, ya que, según el enunciado, este punto no pertenece al dominio de la función).

Derivando y simplificando

$$f'(x) = (\ln x) \cdot (2 + \ln x)$$

y por tanto

$$f'(x) = 0 \iff (\ln x = 0) \text{ o } (2 + \ln x = 0)$$

Si $\ln x = 0 \Longrightarrow x = 1$, y si $2 + \ln x = 0 \Longrightarrow \ln x = -2 \Longrightarrow x = e^{-2}$. En otras palabras,las raíces de la derivada son $x = e^{-2}, 1$. Las variaciones de signo de la derivada son

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

luego $x = e^{-2}$ es un máximo local de valor $f(e^{-2}) = e^{-2}\big(\ln(e^{-2})\big)^2 = e^{-2}(-2)^2 = 4e^{-2}$. No es absoluto pues

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x(\ln x)^2 = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

Por último, $x = 1$ es un mínimo local de valor

$$f(1) = 1 \cdot (\ln 1)^2 = 1 \cdot 0 = 0$$

y por consiguiente, al igual que $x = 0$ es un mínimo absoluto.

En conclusión

- $x = 0$ es un mínimo absoluto, $f(0) = 0$.
- $x = 1$ es un mínimo local y absoluto, $f(1) = 0$.
- $x = e^{-2}$ es un máximo local no absoluto, $f(e^{-2}) = 4e^{-2}$.

Problema 3 Calcular a con $0 < a < 1$ tal que $\displaystyle\int_a^1 \frac{\ln x}{x}\, dx + 2 = 0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

De la tabla de primitivas inmediatas, utilizamos

$$\int f'(x) \, [f(x)]^n \, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

luego
$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\cdot(\ln x)^1\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2}$$
y por tanto
$$\int_a^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\big[(\ln x)^2\big]_a^1 = \frac{1}{2}\big[(\ln 1)^2-(\ln a)^2\big] = -\frac{(\ln a)^2}{2}$$
Así pues
$$\int_a^1 \frac{\ln x}{x}\,dx + 2 = 2 - \frac{(\ln a)^2}{2} = 0 \Longrightarrow (\ln a)^2 = 4 \Longrightarrow \ln a = \pm 2 \Longrightarrow a = e^{\pm 2}$$
Como $e^2 > 1$ y ha de ser $0 < a < 1 \Longrightarrow a = e^{-2}$.

Problema 4 Consideremos las funciones $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas como
$$f(x) = 5-x^2,\quad g(x) = \frac{4}{x^2}$$

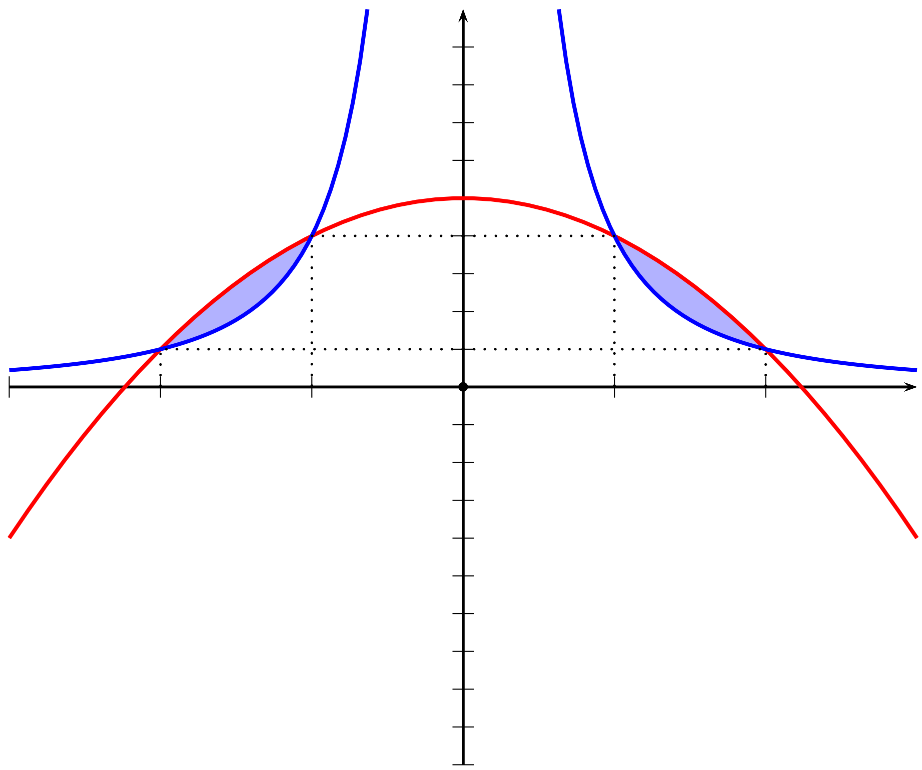
1. Esbozar las gráficas de ambas funciones y calcular los puntos de corte entre ellas.
2. Hallar la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g.

Ambas funciones son pares, luego el dibujo de las gráficas es simétrico respecto al eje de ordenadas.

La gráfica de f es una parábola. Sea $y = f(x) = 5-x^2$. Para $x = 0$ es $y = 5$, y si $y = 0$, entonces:
$$x^2 = 5 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{5}$$
luego los cortes con con los ejes son $(0,5)$, $(-\sqrt{5},0)$ y $(\sqrt{5},0)$. Calculemos el vértice:
$$f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$
y como $f''(x) = -2 < 0$, f es cóncava y el vértice $V(0,5)$ es un máximo.

Sigamos con la segunda. La función g es positiva. Como $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \dfrac{4}{0^2} = +\infty$, la recta $x = 0$, es decir, el eje de ordenadas es asíntota vertical. También
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2} = \frac{4}{+\infty} = 0$$
luego la recta $y = 0$, es decir, el eje de abscisas es una asíntota horizontal.

Los puntos comunes a ambas curvas se consiguen resolviendo la ecuación
$$5-x^2 = \frac{4}{x^2} \Longrightarrow \{\text{simplificando}\} \Longrightarrow x^4-5x^2+4 = 0$$
Resolviendo esta bicuadrada, obtenemos $x = \pm 1, \pm 2$. Ahora bien
$$x = \pm 1 \Longrightarrow y = \frac{4}{(\pm 1)^2} = 4$$
$$x = \pm 2 \Longrightarrow y = \frac{4}{(\pm 2)^2} = 1$$
luego los puntos comunes son
$$(1,4),\ (-1,4),\ (2,1),\ (-2,1)$$
En fin, con todos estos conocimientos, el esbozo pedido es el siguiente (escala horizontal aumentada, parábola f en rojo y g en azul):



Debido a la simetría, la suma de ambas áreas es:

$$S = 2\int_1^2 \left[(5-x^2) - \frac{4}{x^2}\right] dx = 2\left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x}\right]_1^2 = 2\cdot\left[10 - \frac{8}{3} + 2 - \left(5 - \frac{1}{3} + 4\right)\right] =$$
$$= 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Problema 5 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

1. Hallar los valores de m para que la matriz $A - mI$ no tenga inversa.
2. Hallar $x \neq 0$ de forma que $A - xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A - I)$.

Tenemos

$$A - mI = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$$

En el determinante

$$|A - mI| = \begin{vmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{vmatrix}$$

a la primera fila le restamos la segunda y a la segunda le restamos la tercera, con lo que:

$$|A - mI| = \begin{vmatrix} -m & m & 0 \\ 0 & -m & m \\ 1 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = m^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{vmatrix}$$

Este último lo desarrollamos por la regla de Sarrus, para obtener

$$|A - mI| = m^2(3 - m)$$

y por consiguiente $|A - mI| = 0 \Longleftrightarrow m = 0, 3$, que son los valores de m para los que la matriz $A - mI$ no tiene inversa.

Veamos la segunda parte. Por el apartado primero, tenemos que $|A - xI| = x^2(3 - x)$. Sabemos, por la teoría, que si M es una matriz cuadrada de orden n y λ es un número, entonces $|\lambda M| = \lambda^n |M|$. Por tanto, volviendo a utilizar el apartado primero

$$\left|\frac{1}{x}(A - I)\right| = \frac{1}{x^3}|A - I| = \frac{1}{x^3} \cdot 2 = \frac{2}{x^3}$$

Como ambas matrices son inversas, el producto de sus determinantes es 1, es decir

$$x^2(3 - x) \cdot \frac{2}{x^3} = 1 \Longrightarrow \{\text{simplificando}\} \Longrightarrow 2(3 - x) = x \Longrightarrow x = 2$$

Problema 6 El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6 %, el 12 % y el 30 % respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcular el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

Sean

$$\begin{aligned} x &= \text{gasto en refrescos sin impuestos} \\ y &= \text{gasto en cerveza sin impuestos} \\ z &= \text{gasto en vino sin impuestos} \end{aligned}$$

Por el enunciado, las dos primeras ecuaciones son

$$x + y + z = 500, \; x + y - 60 = z$$

La tercera ecuación es

$$\frac{6}{100}x + \frac{12}{100}y + \frac{30}{100}z = 92{,}4 \Longrightarrow 6x + 12y + 30z = 9240 \Longrightarrow x + 2y + 5z = 1540$$

En definitiva, hemos de resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= 500 \\ x + y - z &= 60 \\ x + 2y + 5z &= 1540 \end{aligned}$$

Resto a la primera la segunda, $2z = 440 \Longrightarrow z = 220$. Sustituyendo este valor en la primera y tercera, y simplificando

$$\begin{aligned} x + y &= 280 \\ x + 2y &= 440 \end{aligned}$$

Resto a la segunda la primera, $y = 160$, y por tanto $x = 280 - 160 = 120$. Es decir

$$x = 120, \; y = 160, \; z = 220$$

Los gastos, **incluyendo impuestos** son, por tanto

$$\begin{aligned}\text{refrescos} &= 120 \cdot 1{,}06 = 127{,}2\\ \text{cerveza} &= 160 \cdot 1{,}12 = 179{,}2\\ \text{vino} &= 220 \cdot 1{,}3 = 286\end{aligned}$$

Problema 7 Consideremos los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y = 2$.

1. Calcular la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $P(2, 6, -2)$.
2. Hallar el ángulo que forman π_1 y π_2

Sea r la recta intersección de π_1 y π_2, es decir $r = \pi_1 \cap \pi_2$

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Interesa, como casi siempre, la recta en forma punto-vector-director. Para ello, la parametrizamos. Sea $x = t \Longrightarrow y = 2 - x = 2 - t$, y por tanto $z = y - x = 2 - t - t = 2 - 2t$, es decir

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 2t \end{array}\right\} \equiv \begin{cases} Q(0, 2, 2) \\ \vec{u} = (1, -1, -2) \end{cases}$$

Por la teoría sabemos que la distancia de P a r es

$$d(P, r) = \frac{||\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||}$$

En fin $\overrightarrow{PQ} = (-2, -4, 4) = -2(1, 2, -2)$, y de aquí

$$\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{u} = -2 \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2(-6, 0, -3) = 6 \cdot (2, 0, 1)$$

En fin

$$||\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{u}|| = ||6 \cdot (2, 0, 1)|| = 6\sqrt{2^2 + 1^2} = 6\sqrt{5}$$

Por otro lado $||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$, con lo cual

$$d(P, r) = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{30}$$

Para la segunda parte, el ángulo que forman dos planos es el ángulo que forman sus normales. El vector normal a π_1 es $\vec{n_1} = (1, -1, 1)$ y el normal a π_2 es $\vec{n_2} = (1, 1, 0)$. Como $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$, con lo que $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$, y por tanto, los planos forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ rad., es decir, son perpendiculares.

Problema 8 Calcular el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos $A(0, 2, -2)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(2, 3, 2)$ con los planos cartesianos.

Obtengamos, en primer lugar la ecuación del plano π que pasa por estos tres puntos. Los vectores directores del plano son $\overrightarrow{AB} = (3,0,3) \sim (1,0,1)$ (el símbolo $\sim$ indica que tan vector director es el de la izquierda como el de la derecha) y $\overrightarrow{AC} = (2,1,4)$, luego

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z+2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\text{desarrollando y simplificando}\} \Longrightarrow x + 2y - z - 6 = 0$$

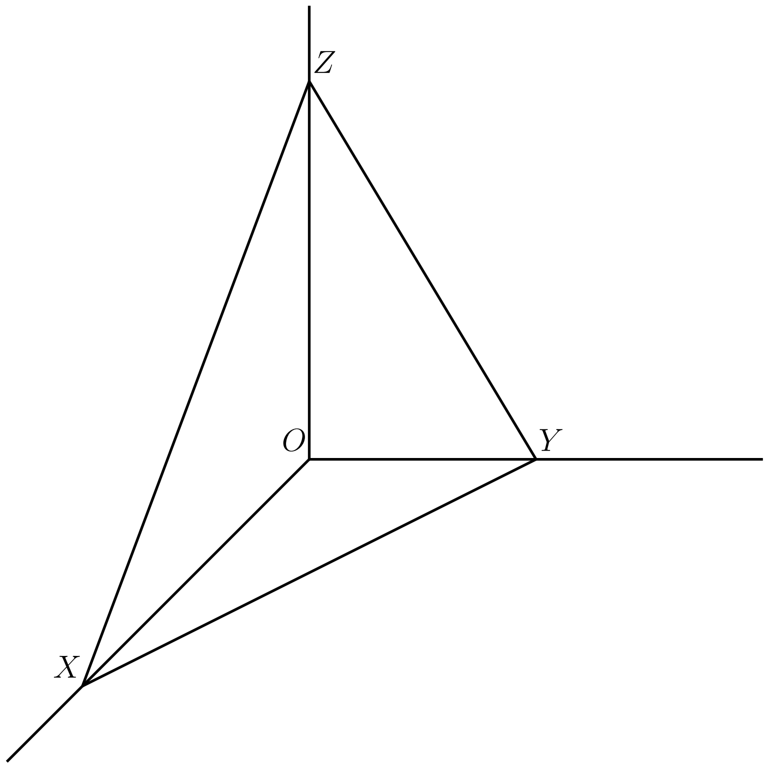
Los puntos de corte de π con los ejes de coordenadas son

$$\text{Corte con el eje } X \equiv \left\{ \begin{aligned} x + 2y - z - 6 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 6 \Longrightarrow X(6,0,0)$$

$$\text{Corte con el eje } Y \equiv \left\{ \begin{aligned} x + 2y - z - 6 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow 2y - 6 = 0 \Longrightarrow y = 3 \Longrightarrow Y(0,3,0)$$

$$\text{Corte con el eje } Z \equiv \left\{ \begin{aligned} x + 2y - z - 6 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow -z - 6 = 0 \Longrightarrow z = -6 \Longrightarrow Z(0,0,-6)$$

Ver la siguiente figura



Podemos aplicar la fórmula general del volumen de un tetraedro o la de toda la vida, es decir

$$\text{Volumen de una pirámide} = \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{altura}$$

La base de la pirámide es un triángulo rectángulo de dimensiones 6 y 3. La altura es 6, luego

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 3}{2} \cdot 6 = 18$$