Selectividad Matemáticas II, julio 2024, Andalucía

Pedro González Ruiz

22 de julio de 2024

Problema 1 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = a + b\cos(x) + c\,\mathrm{sen}(x).$$

Hallar a, b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{2}$ a la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Tenemos tres incógnitas (a, b y c), necesitamos por tanto tres condiciones para calcularlas. Como la recta $y = 1$ es tangente a la gráfica en $x = \frac{\pi}{2}$, es $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. La pendiente de la recta $y = 1$ es $y' = 0$, luego $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Además, la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en $x = 0$, luego $y = 0 - 1 = -1$, es decir, el punto de corte es $(0, -1)$, luego $f(0) = -1$. En conclusión, las tres condiciones que tenemos son:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ f(0) = -1$$

Así pues

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + b\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\{\begin{matrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{matrix}\right\} = a + c$$

$$-1 = f(0) = a + b\cos 0 + c\,\mathrm{sen}\,0 = \left\{\begin{matrix} \cos 0 = 1 \\ \mathrm{sen}\,0 = 0 \end{matrix}\right\} = a + b$$

Por otro lado $f'(x) = -b\,\mathrm{sen}\,x + c\cos x$, y de aquí

$$0 = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + c\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b \Longrightarrow b = 0$$

Sustituyendo en $a + b = -1 \Longrightarrow a = -1$, y al ser $a + c = 1 \Longrightarrow c = 2$. En conclusión:

$$a = -1,\ b = 0,\ c = 2,\ f(x) = -1 + 2\,\mathrm{sen}\,x$$

Problema 2 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x^2}.$$

1. Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
2. Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Debemos estudiar los cambios de signo de la derivada. Derivando, simplificando y factorizando

$$f'(x) = -2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$$

El factor exponencial e^{-x^2} es siempre positivo para todo $x \in \mathbb{R}$, luego no debemos tenerlo en cuenta. Así pues, tenemos

	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

luego f decrece ($\searrow$) en $]-\infty,-1/2[\,\cup\,]1,+\infty[$ y crece ($\nearrow$) en $]-1/2,1[$.

En principio, el punto $x=-\frac{1}{2}$ es un mínimo local de valor

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)e^{-1/4} = -e^{-1/4}$$

y $x=1$ es un máximo local de valor

$$f(1) = \left(1-\frac{1}{2}\right)e^{-1} = \frac{e^{-1}}{2}$$

Los signos de f son

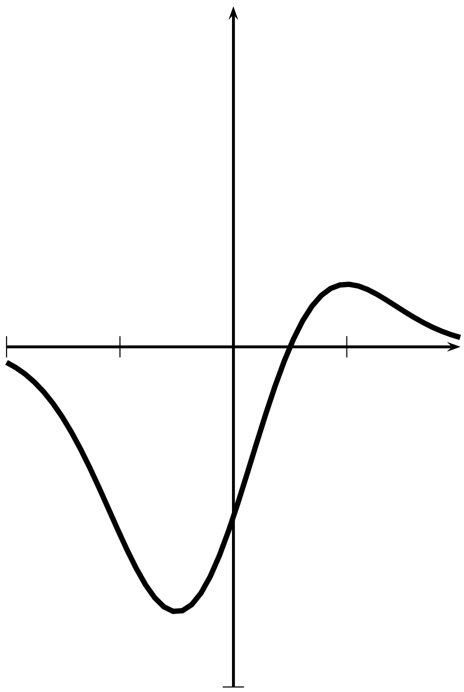
	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$+$	

y como

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x-\frac{1}{2}}{e^{x^2}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \{\text{L'Höpital}\} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x\cdot e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

con lo que la recta horizontal $y=0$ (eje de abscisas) es una asíntota de la función, y por tanto, los extremos $A\left(-\frac{1}{2},-e^{-1/4}\right)$ y $B\left(1,\frac{e^{-1}}{2}\right)$ son absolutos.

Recopilando todos los resultados anteriores, la gráfica de la función es



Problema 3 Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = -x^2 + 7, \quad g(x) = |x^2 - 1|$$

1. Hallar los puntos de intersección de las gráficas de f y g. Realizar un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

2. Calcular el área de dicho recinto.

Ambas funciones son pares ya que

$$f(-x) = -(-x)^2 + 7 = -x^2 + 7 = f(x), \; g(-x) = |(-x)^2 - 1| = |x^2 - 1| = g(x)$$

luego podemos limitarnos a los x positivos, es decir, $x \geq 0$. Las gráficas de f y g son simétricas respecto al eje de ordenadas.

Para los puntos de corte, hemos de resolver la ecuación

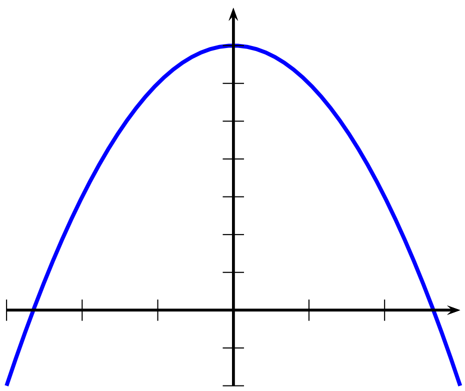
$$-x^2 + 7 = |x^2 - 1| \Longrightarrow \begin{cases} -x^2 + 7 = x^2 - 1 \Longrightarrow 2x^2 = 8 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2 \\ -x^2 + 7 = -(x^2 - 1) \Longrightarrow 7 = 1(\text{absurdo}) \end{cases}$$

y como $f(2) = -2^2 + 7 = 3$, $f(-2) = f(2) = 3$, los únicos puntos comunes a ambas funciones son $(2, 3)$ y $(-2, 3)$.

La gráfica de $y = f(x)$ es una parábola. Para dibujarla es suficiente con calcular los cortes con los ejes y el vértice. En fin, para $x = 0 \Longrightarrow y = 7$, y si $y = 0 \Longrightarrow x^2 = 7 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{7}$, luego los cortes con los ejes son

$$(0, 7), \; (\sqrt{7}, 0), \; (-\sqrt{7}, 0)$$

Para el vértice es $y' = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y como $y'' = -2 < 0$, f es cóncava y el vértive $V(0, 7)$ es un máximo. La gráfica es

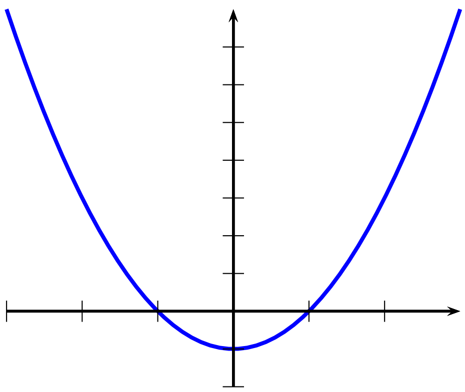


Sabemos que dibujar g es lo mismo que dibujar $y = g_1(x) = x^2 - 1$, y una vez obtenida esta gráfica, las y positivas de g_1 se dejan como están y las y negativas se simetrizan respecto al eje X.

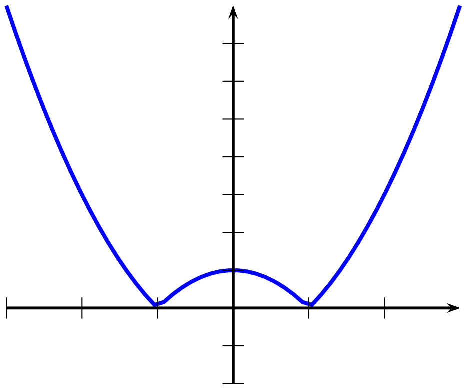
La gráfica de $y = g_(x) = x^2 - 1$ es una parábola. Al igual que antes, para dibujarla es suficiente con calcular los cortes con los ejes y el vértice. En fin, para $x = 0 \Longrightarrow y = -1$, y si $y = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$, luego los cortes con los ejes son

$$(0, -1), \; (1, 0), \; (-1, 0)$$

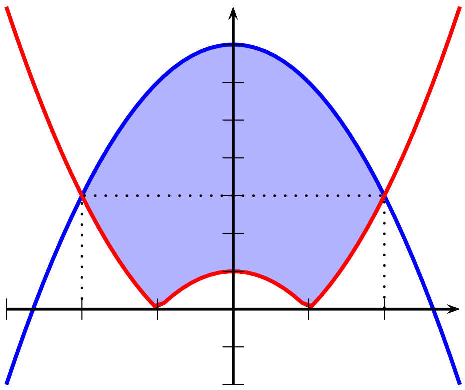
Para el vértice es $y' = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y como $y'' = 2 > 0$, g_1 es convexa y el vértive $V(0, -1)$ es un mínimo. La gráfica es



y por consiguiente, la gráfica de g es



Juntándolo todo, tenemos



En todos los casos, la escala horizontal ha sido aumentada.

Para la segunda parte, debido a la simetría y al hecho de que $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [-2, 2]$, el área S del recinto pedido es

$$S = 2\int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = 2\int_0^2 \big(-x^2 + 7 - |x^2 - 1|\big)\,dx$$

Ahora bien

$$g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

luego

$$S = 2\left[\int_0^1 \big(-x^2 + 7 - (1 - x^2)\big)\,dx + \int_1^2 \big(-x^2 + 7 - (x^2 - 1)\big)\,dx\right]$$

Así
$$\int_0^1 \left(-x^2+7-(1-x^2)\right) dx = \int_0^1 6\, dx = 6[x]_0^1 = 6$$
y la segunda
$$\int_1^2 \left(-x^2+7-(x^2-1)\right) dx = \int_1^2 (8-2x^2)\, dx = \left[8x - \frac{2x^3}{3}\right]_1^2 = 16 - \frac{16}{3} - \left(8 - \frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}$$
Finalmente
$$S = 2\left(6 + \frac{10}{3}\right) = \frac{56}{3}$$

Problema 4 Hallar $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx$.

Aplicamos la fórmula de la integración por partes
$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\, dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\, dx$$
Sea I la integral pedida. En fin
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx = \left\{\begin{array}{l} f(x) = e^x \\ g'(x) = \cos x \\ g(x) = \operatorname{sen} x \\ f'(x) = e^x \end{array}\right\} = [e^x \operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen} x\, dx$$
Otra vez
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen} x\, dx = \left\{\begin{array}{l} f(x) = e^x \\ g'(x) = \operatorname{sen} x \\ g(x) = -\cos x \\ f'(x) = e^x \end{array}\right\} = -\left[e^x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx = 1 + I$$
luego
$$I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - I \Longrightarrow 2I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \Longrightarrow I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$$

Problema 5 Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Hallar todas las matrices X que cumplan $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
2. Determinar todas las matrices Y que cumplan $YA = AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1.

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces
$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}$$
$$AX^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ b & d \end{pmatrix} \Longrightarrow -AX^t = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix}$$

luego

$$XA = -AX^t \Longrightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -a = a \Longrightarrow a = 0 \\ \ \ b = c \\ -c = -b \\ \ \ d = -d \Longrightarrow d = 0 \end{cases}$$

con lo que $X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$. Sabemos que si P y Q son matrices cuadradas de la misma dimensión, es $|P \cdot Q| = |P| \cdot |Q|$, luego

$$X^2 = I \Longrightarrow |X^2| = |X|^2 = |I| = 1 \Longrightarrow |X| = \pm 1$$

Así pues

$$|X| = \begin{vmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b^2 = \pm 1 \Longrightarrow \begin{cases} -b^2 = 1 \Longrightarrow \text{ absurdo} \\ -b^2 = -1 \Longrightarrow b^2 = 1 \Longrightarrow b = \pm 1 \end{cases}$$

con lo que

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que es la respuesta a la primera parte.

Para la segunda parte, sea $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned} YA &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} \\ AY &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego

$$YA = AY \Longrightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -a = -a \\ \ \ b = -b \Longrightarrow b = 0 \\ \ \ c = -c \Longrightarrow c = 0 \\ \ \ d = d \end{cases}$$

y por consiguiente

$$Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Por el enunciado, la suma de los elementos de la diagonal principal es cero, es decir, $a + d = 0 \Longrightarrow d = -a$, con lo que $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$. Por último

$$-1 = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2 \Longrightarrow a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1$$

y así

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que es la respuesta a la segunda parte.

Problema 6 Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes: A, B y C. En un primer pedido, una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros.

1. ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?
2. Si añadimos que el precio de un perfume de tipo C es $\dfrac{2}{5}$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

Sean

$$\begin{aligned} x &= \text{precio del perfume } A \\ y &= \text{precio del perfume } B \\ z &= \text{precio del perfume } C \end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones del enunciado, las dos primeras ecuaciones son

$$\left\{ \begin{aligned} 20x + 30y + 15z = 2200 \\ 15x + 10y + 10z = 1250 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \{\text{simplificando}\} \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} 4x + 6y + 3z = 440 \\ 3x + 2y + 2z = 250 \end{aligned} \right\}$$

Vamos a resolver este sistema. La matriz de los coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Quremos evitar fracciones, si es posible.

- Si tomamos z como parámetro y lo pasamos al segundo miembro, entonces

  $$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10$$

  que no interesa.

- Si tomamos y como parámetro y lo pasamos al segundo miembro, entonces

  $$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$$

  que sí interesa.

En fin, tomando $y = t$, el sistema queda como

$$\begin{aligned} 4x + 3z &= 440 - 6t \\ 3x + 2z &= 250 - 2t \end{aligned}$$

Aplicamos la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 440 - 6t & 3 \\ 250 - 2t & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2(440 - 6t) - 3(250 - 2t)}{-1} = -130 + 6t$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 440 - 6t \\ 3 & 250 - 2t \end{vmatrix}}{-1} = \frac{4(250 - 2t) - 3(440 - 6t)}{-1} = 320 - 10t$$

La solución del sistema es

$$x = -130 + 6t,\ y = t,\ z = 320 - 10t \tag{1}$$

Respondamos ya a la primera parte

$$25x+10y+16z = 25\cdot(-130+6t)+10t+16\cdot(320-10t) = -3250+150t+10t+5120-160t = 1870$$

con lo que la respuesta es 1870 euros.

Veamos otra forma de hacer esta parte. Sea $T = 25x + 10y + 16z$. Para que la pregunta tenga sentido, el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 440 \\ 3 & 2 & 2 & 250 \\ 25 & 10 & 16 & T \end{pmatrix}$$

ha de ser 2, es decir, el vector tercera fila debe ser una combinación lineal de los dos primeros, lo que implica que se debe cumplir

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 25 & 10 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Sumando a la tercera fila la segunda multiplicada por -8 es

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 25 & 10 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{Sarrus}\} = -54 + 12 - 6 + 48 = 0$$

Busquemos la combinación lineal en la matriz de los coeficientes

$$\alpha(4, 6, 3) + \beta(3, 2, 2) = (25, 10, 16)$$

Consideremos solo la segunda y tercera coordenadas

$$\left\{\begin{matrix} 6\alpha + 2\beta = 10 \\ 3\alpha + 2\beta = 16 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \{\text{restando}\} \Longrightarrow 3\alpha = -6 \Longrightarrow \alpha = -2$$

y de aquí

$$10 = 6\alpha + 2\beta = -12 + 2\beta \Longrightarrow \beta = 11$$

Comprobemos que funciona con la primera (coordenada no utilizada)

$$4\alpha + 3\beta = -8 + 33 = 25 \quad \text{(correcto)}$$

Así pues, ha de ser

$$T = -2 \cdot 440 + 11 \cdot 250 = 1870$$

como pretendíamos.

Para la segunda parte, la nueva ecuación es $z = \dfrac{2}{5}x$, o bien

$$320 - 10t = \frac{2}{5}(-130 + 6t) \Longrightarrow 1600 - 50t = -260 + 12t \Longrightarrow 62t = 1860 \Longrightarrow t = \frac{1860}{62} = 30$$

Sustituyendo en (1)

$$x = -130 + 6 \cdot 30 = 50, \ y = 30, \ z = 320 - 10 \cdot 30 = 20$$

Concluyendo

$$x = 50, \ y = 30, \ z = 20 \text{ euros}$$

Problema 7 Consideremos el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Estudiar la posición relativa de π y r.
2. Hallar la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r.

En general, para estudiar la posición relativa de una recta r y un plano π vamos a seguir el siguiente criterio: parametrizamos la recta llamando t al parámetro, y consideramos la ecuación implícita del plano (como en este problema). Sustituímos las paramétricas de la recta en el plano, con lo que obtenemos una ecuación de primer grado en la variable t. Pueden darse los siguientes casos:

- La ecuación tiene una única solución, es decir, la recta y el plano se cortan en un punto P, $r \cap \pi = \{P\}$.
- La ecuación no tiene solución, es decir, la recta es paralela al plano, $r \parallel \pi$.
- La ecuación degenera en una identidad ($0 = 0$), lo que equivale a decir que todo punto de la recta está en el plano, es decir, la recta está contenida en el plano, $r \subset \pi$.

En nuestro caso

$$0 = x - 2y + z - 2 = \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{array} \right\} = 1 + 2t - 2t + 1 - 2 = 0$$

Por el criterio, deducimos que la recta está contenida en el plano ($r \subset \pi$).

Para la segunda parte, sea s la recta que nos piden. Por el enunciado es $P \in s$. Nos falta conocer un vector director $\vec{v}$ de s. Sea $\vec{n} = (1, -2, 1)$ el vector normal (perpendicular) al plano π. Por el enunciado, como $s \subset \pi \Longrightarrow \vec{v} \perp \vec{n}$. Un vector director de r es $\vec{u} = (2, 1, 0)$, y también, por el enunciado es $\vec{v} \perp \vec{u}$. Así pues, $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{n}$, luego podemos tomar como $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{n}$, es decir

$$\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -5)$$

y la recta pedida en forma continua es

$$s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{-5}$$

Problema 8 Consideremos los puntos $A(4, 0, 0)$ y $B(0, 2, 0)$. Calcular los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B.

Veamos dos formas de hacer el problema.

1. La ecuación del plano OXZ es $y = 0$, luego los puntos que buscamos son de la forma $P(x, 0, z)$, con x y z a determinar. Como el triángulo ABP es equilátero, tenemos que

$$d(A, P) = d(B, P) = d(A, B)$$

En fin

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} &= (x-4, 0, z) \Longrightarrow d(A, P) = ||\overrightarrow{AP}|| = \sqrt{(x-4)^2 + z^2} \\
\overrightarrow{BP} &= (x, -2, z) \Longrightarrow d(B, P) = ||\overrightarrow{BP}|| = \sqrt{x^2 + 4 + z^2} \\
\overrightarrow{AB} &= (-4, 2, 0) \Longrightarrow d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}
\end{aligned}$$

Igualando la primera y segunda y elevando al cuadrado

$$(x-4)^2 + z^2 = x^2 + 4 + z^2 \Longrightarrow x^2 - 8x + 16 + z^2 = x^2 + 4 + z^2 \Longrightarrow 8x = 12 \Longrightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Igualando la segunda y tercera y elevando al cuadrado

$$x^2 + 4 + z^2 = 20 \Longrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = 16 \Longrightarrow z^2 = \frac{55}{4} \Longrightarrow z = \pm\frac{\sqrt{55}}{2}$$

es decir, dos soluciones

$$P_1\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{55}}{2}\right), \quad P_2\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$$

2. Consideremos el plano mediatriz m del segmento AB, es decir, el plano perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio $M\left(\frac{4+0}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (2, 1, 0)$. El vector normal al plano es $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-4, 2, 0) \sim (2, -1, 0)$ (el símbolo $\sim$ indica equivalencia, lo que quiere decir que tan vector normal es el de la izquierda como el de la derecha). Así pues, el plano m es $2x - y + k = 0$. Como ha de pasar por el punto $M(2, 1, 0)$ es

$$2 \cdot 2 - 1 + k = 0 \Longrightarrow k = -3 \Longrightarrow m \equiv 2x - y - 3 = 0$$

El plano mediatriz de un segmento es tal que cualquier punto de él equidista de A y de B, luego los puntos que vamos buscando están en m. Por el enunciado, estos puntos están también en OXZ, cuya ecuación es $y = 0$, luego están en la recta

$$r \equiv \left\{\begin{array}{r} 2x - y - 3 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} 2x - 3 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 0 \\ z = t \end{array}\right\}$$

En definitiva, los puntos que buscamos son de la forma $P\left(\frac{3}{2}, 0, t\right)$. Finalmente, $d(B, P) = d(A, B)$, o bien

$$\overrightarrow{BP} = \left(\frac{3}{2}, -2, t\right) \Longrightarrow d(B, P) = \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + t^2}$$

y por tanto

$$\sqrt{\frac{9}{4} + 4 + t^2} = \sqrt{20} \Longrightarrow \frac{9}{4} + 4 + t^2 = 20$$

lo que nos conduce a la misma ecuación resuelta anteriormente, es decir $t = \pm\frac{\sqrt{55}}{2}$, y por tanto

$$P\left(\frac{3}{2}, 0, t\right) \Longrightarrow \begin{cases} P_1\left(\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{55}}{2}\right) \\ P_2\left(\dfrac{3}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{55}}{2}\right) \end{cases}$$