Selectividad Matemáticas II, junio 2023, Andalucía (versión 1)

Pedro González Ruiz

14 de junio de 2023

Problema 1 Consideremos la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$.

1. Estudiar y hallar los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
2. Calcular $\lim_{x\to+\infty}(x^2 f(x))$.

Tenemos

$$f(-x)=\frac{1}{e^{-x}+e^x}=f(x)$$

luego f es par, o lo que es lo mismo, simétrica respecto al eje de ordenadas, con lo cual podemos suponer de ahora en adelante que $x\geq 0$. También, como $e^x>0$, para todo $x\in\mathbb{R}$, es $f(x)>0$, es decir, f es positiva. Derivando

$$f'(x)=-\frac{e^x-e^{-x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=-\frac{e^{2x}-1}{e^x\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

Los factores e^x y $\left(e^x+e^{-x}\right)^2$ son positivos, luego no hay que preocuparse de ellos. Al ser $x\geq 0\Longrightarrow 2x\geq 0\Longrightarrow e^{2x}\geq 1\Longrightarrow e^{2x}-1\geq 0$, y por tanto, $f'(x)\leq 0$, luego f decrece en $[0,+\infty[$ y por ser par, crece en $]-\infty,0]$, con lo cual $x=0$ es un máximo absoluto de valor

$$f(0)=\frac{1}{e^0+e^{-0}}=\frac{1}{2}$$

Queda probado pues, que no hay más extremos. Finalmente

$$\lim_{x\to+\infty}x^2 f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x+e^{-x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\{\text{L'Höpital}\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x-e^{-x}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$$

ya que $e^{-\infty}=0$. Aplicando la regla de L'Höpital una vez más

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{2}{+\infty}=0$$

Problema 2 Sea la función $f:[-2,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-2x+5$

1. Determinar las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2,f(-2))$ y $(2,f(2))$.
2. Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

Gracias al teorema del valor medio, podemos afirmar sin hacer ningún cálculo, que efectivamente, hay al menos un punto donde se cumplen las condiciones de la pregunta del apartado primero. En efecto, f es un polinomio, y por tanto, continua y derivable en el intervalo $[-2,2]$. Aplicando el teorema del valor medio a f en este intervalo $(f(b)-f(a)=(b-a)f'(c),\ c\in]a,b[)$ tenemos

$$f(2)-f(-2)=\big(2-(-2)\big)f'(c),\ \text{o bien},\ f(2)-f(-2)=4\cdot f'(c),\ c\in]-2,2[$$

Ahora bien, $f(2)=2^3-2\cdot 2+5=9$, $f(-2)=(-2)^3-2\cdot(-2)+5=1$, luego $8=4\cdot f'(c)\Longrightarrow f'(c)=2$. Teniendo en cuenta que $f'(x)=3x^2-2$, resulta

$$3c^2-2=2\Longrightarrow 3c^2=4\Longrightarrow c=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Los dos valores valen pues $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\in[-2,2]$.

Encontremos el punto de inflexión

$$f''(x)=6x=0\Longrightarrow x=0$$

y como $f'''(x)=6\neq 0$, $x=0$ es ciertamente un punto de inflexión. En fin, $f(0)=5$, $f'(0)=-2$, con lo que la recta tangente en $x=0$ es

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=f(0)+xf'(0)=5-2x$$

y la normal es

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)=f(0)-\frac{1}{-2}x=5+\frac{x}{2}$$

En conclusión

$$\text{tangente}\equiv y=5-2x,\quad \text{normal}\equiv y=5+\frac{x}{2}$$

Problema 3 Consideremos la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como $f(x)=x|x-1|$. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x=0$.

Este problema es idéntico al segundo, opción A de la Selectivad de junio de 2009. Tal y como está redactado allí, se copia aquí.

Desarrollamos f utilizando la definición de valor absoluto:

$$|u|=\begin{cases}-u, & \text{si } u<0\\ u, & \text{si } u\geq 0\end{cases}\Longrightarrow |x-1|=\begin{cases}-x+1, & \text{si } x<1\\ x-1, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

luego

$$f(x)=\begin{cases}x(1-x), & \text{si } x<1\\ x(x-1), & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

Para obtener la gráfica de f hay que dibujar cada uno de los trozos, en concreto, las parábolas:

$$p_1(x)=x(1-x),\ x<1;\ p_2(x)=x(x-1),\ x\geq 1$$

Comencemos con $y=p_1(x)=x(1-x)=x-x^2$. Para $x=0$ es $y=0$, y si $y=0$, entonces:

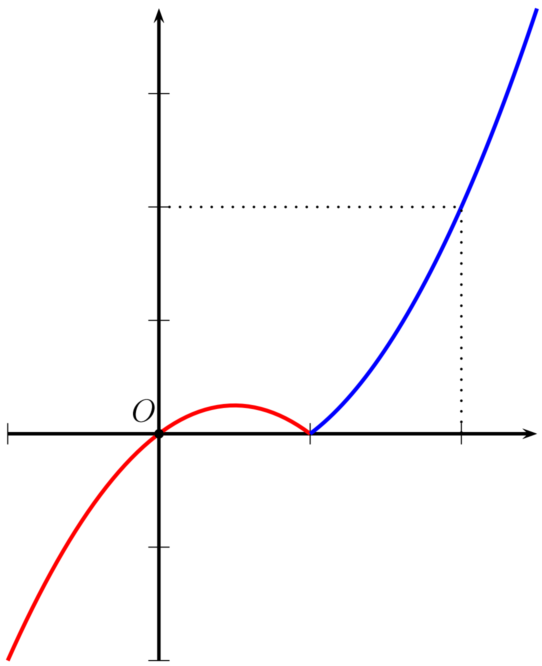
$$x(1-x)=0\Longrightarrow x=0,1$$

luego los cortes con con los ejes son $(0,0)$ y $(1,0)$. Calculemos el vértice:

$$p_1'(x) = 1 - 2x \Longrightarrow 1 - 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

y como $p_1''(x) = -2 < 0$, p_1 es cóncava y el vértice es un máximo de valor $p_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, es decir $V_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Es sencillo comprobar que p_1 crece para $x < \frac{1}{2}$ y decrece para $x > \frac{1}{2}$.

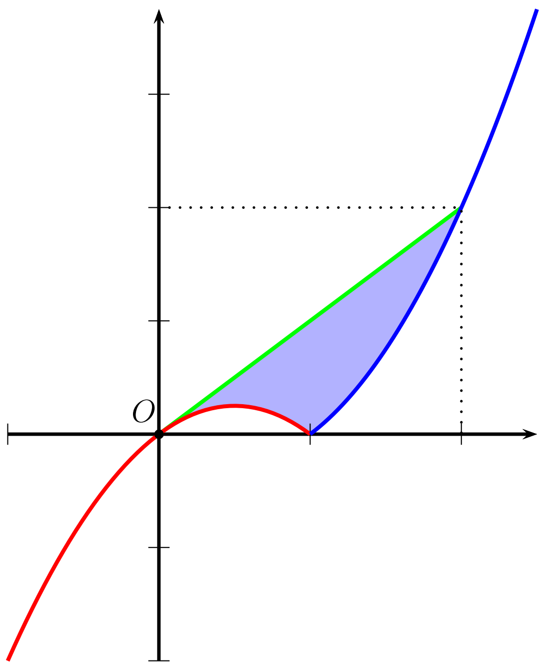
Sigamos con $y = p_2(x) = x(x-1) = x^2 - x$, para $x \geq 1$. Para $x = 1$ es $y = p_2(1) = 0$, luego p_2 pasa por $(1,0)$. Además $p_2'(x) = 2x - 1$, y como $x \geq 1$, p_2 crece en $I = [1, +\infty[$. Por último $p_2''(x) = 2 > 0$, luego p_2 es convexa en I, y la gráfica de f es (en rojo p_1 y en azul p_2):



Para el apartado segundo, la recta tangente de f en $x = 0$, es la recta tangente de p_1 en $x = 0$, es decir:

$$y = p_1(0) + p_1'(0)(x - 0) = \left\{ \begin{matrix} p_1(0) = 0 \\ p_1'(0) = 1 \end{matrix} \right\} = 0 + 1(x - 0) = x$$

Por último, la gráfica conjunta de f y la recta tangente (en verde) es:



El área del recinto pedido es pues:

$$S = \int_0^2 \big(x - f(x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(x - p_1(x)\big)\,dx + \int_1^2 \big(x - p_2(x)\big)\,dx = S_1 + S_2$$

donde

$$S_1 = \int_0^1 \big(x - p_1(x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(x - x(1-x)\big)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

y

$$S_2 = \int_1^2 \big(x - p_2(x)\big)\,dx = \int_1^2 \big(x - x(x-1)\big)\,dx = \int_1^2 (2x - x^2)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$
$$= 4 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Por consiguiente:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

Problema 4 Consideremos la función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$$

Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{xF(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$.

Por las propiedades de la integral definida, sabemos que

$$F(0) = \int_0^o \operatorname{sen}(t^2)\,dt = 0$$

y que $F'(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. Tanbién, por las equivalencias, es $\operatorname{sen}(x^2) \sim x^2$, cuando $x \to 0$. En fin, sea

$$l = \lim_{x\to 0} \frac{xF(x)}{\operatorname{sen}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{xF(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = \frac{F(0)}{0} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \{\text{L'Höpital}\} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x^2) = \operatorname{sen}(0) = 0$$

luego $l = 0$.

Problema 5 Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60 % de los coches blancos más el 50 % de los coches negros representan el 30 % de los coches vendidos. El 20 % de los coches blancos junto con el 60 % de los coches negros y el 60 % de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determinar el número de coches vendidos de cada color.

Sean

$$\begin{aligned} x &= \text{número de coches } \textbf{blancos} \text{ vendidos este mes} \\ y &= \text{número de coches } \textbf{negros} \text{ vendidos este mes} \\ z &= \text{número de coches } \textbf{rojos} \text{ vendidos este mes} \end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} &\frac{60}{100}x + \frac{50}{100}y = \frac{30}{100}(x+y+z) \\ &\frac{20}{100}x + \frac{60}{100}y + \frac{60}{100}z = \frac{x+y+z}{2} \\ &x + 100 = y \end{aligned}$$

Después de simplificar pacientemente, resulta

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 3z &= 0 \\ -3x + y + z &= 0 \\ x - y &= -100 \end{aligned} \tag{1}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes es;

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{regla de Sarrus}\} = -9 + 2 + 3 + 3 = -1$$

Por la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -100 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \{\text{regla de Sarrus otra vez}\} = \frac{-200 - 300}{-1} = 500$$

Sustituyendo este valor en la tercera de (1), $y = x + 100 = 500 + 100 = 600$. Sustituyendo en la segunda de (1), es

$$z = 3x - y = 3 \cdot 500 - 600 = 900$$

En conclusión

$$x = 500,\ y = 600,\ z = 900$$

Problema 6 Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinar para qué valores de m existe la inversa de la matriz A.

2. Para todo $m \neq -1$, resuelve, si es posible, la ecuación $AX + X = B$.

Tenemos

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} = \{\text{regla de Sarrus}\} = m^3$$

luego la matriz A tiene inversa cuando y solo cuando $|A| \neq 0$, es decir $m^3 \neq 0$, o lo que es lo mismo $m \neq 0$.

Veamos la segunda parte. Despejamos X

$$AX + X = B \Longrightarrow (A * I)X = B \Longrightarrow X = (A + I)^{-1}B$$

en el supuesto de que exista $(A + I)^{-1}$, siendo I la matriz identidad de orden 3, es decir

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En fin

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora bien

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = \{\text{regla de Sarrus}\} = 1 + m^3 \neq 0$$

pues, por el enunciado es $m \neq -1$. En conclusión, la matriz $A + I$ es inversible. Hallemos su inversa

$$(A + I)^t = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A + I)^* = \begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{m^3 + 1} \begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$\begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

y por tanto

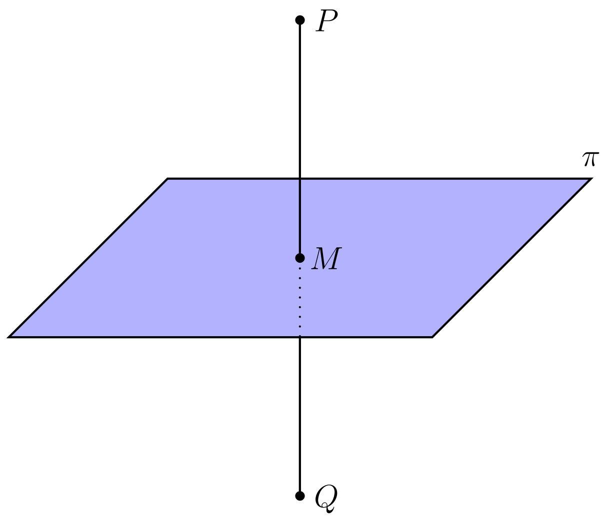
$$X = \frac{1}{m^3 + 1} \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

Problema 7 El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0,3,8)$ y $Q(2,1,6)$ que pasa por su punto medio corta a los ejes de coordenadas en los puntos A, B y C. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C,

Sea M el punto medio del segmento PQ, es decir

$$M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{8+6}{2}\right) = (1,2,7)$$

Sea π el plano perpendicular a PQ que pasa por M (ver figura)



El vector $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{PQ} = (2,-2,-2) \sim (1,-1,-1)$ es perpendicular a π (el símbolo $\sim$ indica equivalencia, es decir, que tan vector normal es el de la izquierda como el de la derecha) y por tanto, el plano π es $x - y - z + \lambda = 0$, siendo λ una constante. Como ha de pasar por el punto $M(1,2,7)$ resulta

$$1 - 2 - 7 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 8 \Longrightarrow \pi \equiv x - y - z - 8 = 0$$

Calculemos ahora los puntos A, B y C. El eje X es una recta cuyas ecuaciones son $y = 0$, $z = 0$, luego

$$A \equiv \left\{ \begin{aligned} x - y - z + 8 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow x + 8 = 0 \Longrightarrow x = -8 \Longrightarrow A(-8,0,0)$$

El eje Y es una recta cuyas ecuaciones son $x = 0$, $z = 0$, luego

$$B \equiv \left\{ \begin{aligned} x - y - z + 8 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow -y + 8 = 0 \Longrightarrow y = 8 \Longrightarrow B(0,8,0)$$

El eje Z es una recta cuyas ecuaciones son $x = 0$, $y = 0$, luego

$$B \equiv \left\{ \begin{aligned} x - y - z + 8 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{aligned} \right\} \Longrightarrow -z + 8 = 0 \Longrightarrow z = 8 \Longrightarrow B(0,0,8)$$

Sabemos por la teoría que la superficie S de un triángulo es

$$S = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$$

En fin $\overrightarrow{AB} = (8, 8, 0) = 8(1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (8, 0, 8) = 8(1, 0, 1)$, luego

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 64 \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 64(1, -1, -1)$$

Por tanto

$$||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|| = 64||(1, -1, -1)|| = 64\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = 64\sqrt{3}$$

y finalmente

$$S = \frac{1}{2}64\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$$

Problema 8 Consideremos el punto $A(-1, 1, 3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2, 1, 1)$ y $C(0, 1, -1)$.

1. Hallar la distancia del punto A a la recta r,
2. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

Un vector director de r es $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BC} = (-2, 0, -2) \sim (1, 0, 1)$ (el símbolo $\sim$ indica equivalencia, es decir, que tan vector director es el de la izquierda como el de la derecha). Según la teoría, la distancia de A a r es

$$d(A, r) = \frac{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u}||}{||\overrightarrow{u}||}$$

En fin

$$\overrightarrow{AB} = (3, 0, -2) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, -5, 0) = 5(0, -1, 0) \Longrightarrow ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u}|| = 5$$

y $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{2}$, luego

$$d(A, r) = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Para la segunda parte, recordamos que el área S de un triángulo de vértices A, B y C es

$$S = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$$

En fin $\overrightarrow{AB} = (3, 0, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 0, -4)$, y de aquí

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (0, 10, 0) = 10(0, 1, 0) \Longrightarrow ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|| = 10$$

luego el área del triángulo es

$$S = \frac{10}{2} = 5$$

Otra forma de hacer este apartado es mediante la fórmula clásica del área de un triángulo

$$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

La base es $||\overrightarrow{BC}||$ y la altura es $d(A, r)$, calculada en el apartado anterior. En fin

$$\overrightarrow{BC} = (-2, 0, -2) = -2(1, 0, 1) \Longrightarrow ||\overrightarrow{BC}|| = 2\sqrt{2}$$

y por consiguiente

$$S = \frac{(2\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = 5$$