Selectividad Matemáticas II, junio 2024, Madrid

Pedro González Ruiz

14 de junio de 2024

Problema 1 Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Sean

$$\begin{aligned} x &= \text{longitud del listón largo} \\ y &= \text{longitud del listón intermedio} \\ z &= \text{longitud del listón corto} \end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{aligned} 2x+4y &= 3y+15z \\ x &= y+z+17 \\ 9z+7 &= x+y \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \{\text{simplificando y ordenando}\} \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} 2x+y-15z &= 0 \\ x-y-z &= 17 \\ x+y-9z &= 7 \end{aligned} \right.$$

La matriz ampliada del sistema es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -15 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

Para la resolución del sistema vamos a utilizar la **reducción gaussiana** con la matriz ampliada, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

Tenemos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -15 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{C_{12}\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 2 & 1 & -15 & 0 \\ 1 & 1 & -9 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-2), S_{31}(-1)\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 3 & -13 & -34 \\ 0 & 2 & -8 & -10 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ M_3\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 3 & -13 & -34 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{C_{23}\} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 3 & -13 & -34 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{32}(-3)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 17 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -19 \end{pmatrix}$$

En fin, la última fila es $-z = -19 \Longrightarrow z = 19$. La segunda es

$$y - 4z = -5 \Longrightarrow y = 4z - 5 = 4 \cdot 19 - 5 = 71$$

Por último, la primera es

$$x - y - z = 17 \Longrightarrow x = y + z + 17 = 71 + 19 + 17 = 107$$

Concluyendo

$$x = 107, \ y = 71, \ z = 19 \quad \text{(cm)}$$

Problema 2 Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

1. Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = \pi$.
2. Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $]-\pi, 0[$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.
3. Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

La ecuación de la recta tangente a una curva en un punto x_0 es $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. En nuestro caso

$$y = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi)$$

Ahora bien

$$f(\pi) = \pi^4 + \pi \cdot \pi^3 + \pi^2 \cdot \pi^2 + \pi^3 \cdot \pi + \pi^4 = 5\pi^4$$

También

$$f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3 \Longrightarrow f'(\pi) = 4\pi^3 + 3\pi \cdot \pi^2 + 2\pi^2 \pi + \pi^3 = 10\pi^3$$

luego

$$y = 5\pi^4 + 10\pi^3(x - \pi) = \{\text{simplificando}\} = 5\pi^3(2x - \pi)$$

Concluyendo, la recta tangente a f en $x = \pi$ es

$$y = 5\pi^3(2x - \pi)$$

Pasemos ahora a la segunda parte. La función f es un polinomio, luego es continua y derivable en todo su dominio ($= \mathbb{R}$). Para que se verifique el teorema de Rolle en $[-\pi, 0]$, ha de cumplirse la condición adicional $f(-\pi) = f(0)$. Ahora bien

$$\begin{aligned} f(-\pi) &= (-\pi)^4 + \pi \cdot (-\pi)^3 + \pi^2 \cdot (-\pi)^2 + \pi^3 \cdot (-\pi) + \pi^4 = \pi^4 \\ f(0) &= \pi^4 \end{aligned}$$

luego se cumplen todas las hipótesis, y por tanto, existe un punto $x_0 \in]-\pi, 0[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Por otro lado, según vimos antes es

$$f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$$

Para poder aplicar el teroema de Bolzano a f', ha de ser continua, y en efecto, lo es, por ser un polinomio, y presentar un cambio de signo en los extremos del intervalo. Veamos

$$\begin{aligned} f'(-\pi) &= 4 \cdot (-\pi)^3 + 3\pi \cdot (-\pi)^2 + 2\pi^2 \cdot (-\pi) + \pi^3 = -2\pi^3 \\ f'(0) &= \pi^3 \end{aligned}$$

Y estamos en las misma de antes, es decir, existe un punto $x_0 \in]-\pi, 0[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Por último

$$g(x) = f(-x) = (-x)^4 + \pi(-x)^3 + \pi^2(-x)^2 + \pi^3(-x) + \pi^4 = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4$$

Operando, obtenemos

$$f(x) - g(x) = 2\pi x(x^2 + \pi^2)$$

Como $x \in [0, \pi] \Longrightarrow x \geq 0$ y $x^2 + \pi^2$ es una suma de cuadrados, luego es positiva, y por tanto $f(x) - g(x) \geq 0$ en $[0, \pi]$. En otras palabras, f domina a g en todo el intervalo $[0, \pi]$, luego rl área pedida es

$$S = \int_0^\pi \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \int_0^\pi 2\pi x(x^2 + \pi^2)\, dx = 2\pi \int_0^\pi (x^3 + x\pi^2)\, dx =$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{\pi^2 x^2}{2}\right]_0^\pi = 2\pi \left(\frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^4}{2}\right) = \frac{3\pi^5}{2}$$

Problema 3 Dados los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 1, 0)$, se pide

1. Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.
2. Hallar las ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

Para la primera parte, sea π el plano pedido. Como pasa por los puntos A y B, un vector director de π es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$. El vector normal al plano $z = 0$ es $\vec{v} = (0, 0, 1)$ (coeficientes de las x, y, z de dicho plano). Al ser ambos planos perpendiculares, $\vec{v}$ es otro vector director de π, luego

$$\pi \equiv \left\{\begin{array}{l} A(0,0,1) \\ \vec{u} = (1,1,-1) \\ \vec{v} = (0,0,-1) \end{array}\right\} \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante por la tercera fila, es

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - y = 0$$

Concluyendo, el plano pedido es $\pi \equiv x - y = 0$.

Para la segunda parte, conocemos de ambas rectas un punto de cada una, y como son paralelas, el vector director $\vec{u}$ de ambas es el mismo, sea $\vec{u} = (a, b, c)$. Sea $\pi \equiv x + z = 1$. Un vector normal de π es $\vec{n} = (1, 0, 1)$ y como $r_1, r_2 \subset \pi \Longrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$, y por tanto

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Longrightarrow (a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = 0 \Longrightarrow a + c = 0 \Longrightarrow c = -a \Longrightarrow \vec{u} = (a, b, -a)$$

La distancia entre dos rectas paralelas es la distancia de un punto cualquiera de ellas a la otra, luego

$$d(r_1, r_2) = d(A, r_2) = \{\text{teoría}\} = \frac{||\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}||}{||\vec{u}||}$$

En fin

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 1 & -1 \\ a & b & -a \end{vmatrix} = (b - a, 0, b - a) = (b - a)(1, 0, 1)$$

y, por tanto

$$||\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}|| = |b-a| \cdot ||(1,0,1)|| = |b-a|\sqrt{2}$$

También $||\vec{u}|| = \sqrt{a^2+b^2+(-a)^2} = \sqrt{2a^2+b^2}$. En fin, por el enunciado, es

$$\frac{|b-a|\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+b^2}} = 1 \iff |b-a|\sqrt{2} = \sqrt{2a^2+b^2}$$

que es la ecuación a resolver. Elevando al cuadrado es $2(b-a)^2 = 2a^2+b^2$. Desarrollando y simplificando

$$b^2 - 4ab = 0 \Longrightarrow b(b-4a) = 0 \Longrightarrow b = 0, 4a$$

Tenemos pues, dos soluciones, y por tanto

- $b = 0 \Longrightarrow \vec{u} = (a, 0, -a) \sim (1, 0, -1)$.
- $b = 4a \Longrightarrow \vec{u} = (a, 4a, -a) \sim (1, 4, -1)$.

El símbolo $\sim$ indica equivalencia, es decir, que tan vector director es el de la izquierda como el de la derecha. Según estos resultados, las rectas, en forma continua, son

- Solución 1.

$$r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(0,0,1) \\ \vec{u} = (1,0,-1) \end{array} \right\} \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{-1}$$

$$r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(1,1,0) \\ \vec{u} = (1,0,-1) \end{array} \right\} \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}$$

- Solución 2.

$$r_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(0,0,1) \\ \vec{u} = (1,4,-1) \end{array} \right\} \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1}$$

$$r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(1,1,0) \\ \vec{u} = (1,4,-1) \end{array} \right\} \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{-1}$$

Problema 4 Sabiendo que

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{11}{20}, P\left(A|B\right) - P\left(B|A\right) = \frac{1}{24} \text{ y } P\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{3}{10}$$

se pide

1. Calcular $P\left(A \cap B\right)$ y $P\left(B\right)$.
2. Hallar $P\left(C\right)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P\left(A \cup C\right) = \dfrac{14}{25}$.

Como

$$\left\{ \begin{array}{l} (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = \emptyset \\ (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A \end{array} \right\} \Longrightarrow P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$$

Luego

$$P(A\cap B)=\frac{9}{20}-P\left(A\cap\overline{B}\right)=\frac{9}{20}-\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$$

Por otro lado

$$P(A|B)-P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}-\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(A\cap B)\left[\frac{1}{P(B)}-\frac{1}{P(A)}\right]$$

Por tanto

$$\frac{1}{24}=\frac{3}{20}\cdot\left[\frac{1}{P(B)}-\frac{20}{9}\right]\Longrightarrow\frac{5}{18}=\frac{1}{P(B)}-\frac{20}{9}\Longrightarrow P(B)=\frac{2}{5}$$

Para la segunda parte, como C es independiente de A, es

$$P(A\cap C)=P(A)P(C)=\frac{9}{20}\cdot P(C)$$

Además

$$P(A\cup C)+P(A\cap C)=P(A)+P(C)\Longrightarrow\frac{14}{25}+\frac{9}{20}\cdot P(C)=\frac{9}{20}+P(C)$$

Resolviendo esta ecuación de primer grado, obtenemos

$$P(C)=\frac{1}{5}$$

Problema 5 Consideremos las matrices reales

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b&2b&b\\2b&3b&b\\b&b&b\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad \text{con } b\neq 0$$

Se pide

1. Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1}=A$.
2. Calcular el determinante de la matriz AA^t.
3. Resolver el sistema

$$B\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\qquad\text{para } b=1$$

Podemos escribir

$$B=\begin{pmatrix}b&2b&b\\2b&3b&b\\b&b&b\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}=bB_1,\quad\text{donde } B_1=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Además

$$|B|=b^3\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\{\text{regla de Sarrus}\}=b^3(3+2+2-3-1-4)=-b^3$$

Por el enunciado, es $b \neq 0$, luego $|B| = -b^3 \neq 0$, y por consiguiente, B es inversible para todo $b \neq 0$. Calculemos la inversa de B_1:

$$B_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B_1^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{|B_1^{-1}| = -1\} \Longrightarrow B_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$B^{-1} = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En fin, para todo $b \neq 0$, tenemos

$$BCB^{-1} = b \cdot \frac{1}{b}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

luego, la relación $BCB^{-1} = A$ es cierta para todo $b \neq 0$.

Veamos la segunda parte

$$A = BCB^{-1} \Longrightarrow |A| = |B| \cdot |C| \cdot |B^{-1}| = |C| = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

pues C es una matriz diagonal, con lo que su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal. En fin, como $|A^t| = |A|$, finalmente

$$|A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A|^2 = 12^2 = 144$$

Finalmente

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

o lo que es lo mismo

$$x = -6,\ y = 2,\ z = 5$$

Problema 6 Calcular

1. $\displaystyle\int_1^e (x+2)\ln x\,dx$

2. $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\cos x}}$

Para la primera parte, aplicamos la fórmula de la integración por partes

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

En fin

$$I = \int_1^e (x+2)\ln x\,dx = \left\{\begin{array}{r} f(x) = \ln x \\ g'(x) = x+2 \\ g(x) = x^2/2 + 2x \\ f'(x) = 1/x \end{array}\right\} = \left[\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\frac{1}{x}\,dx$$

Ahora bien

$$\left[\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x\right]_1^e=\left(\frac{e^2}{2}+2e\right)\ln e-\left(\frac{1}{2}+2\right)\ln 1=\left\{\begin{matrix}\ln e=1\\ \ln 1=0\end{matrix}\right\}=\frac{e^2}{2}+2e$$

y también

$$\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\frac{1}{x}\,dx=\int_1^e\left(\frac{x}{2}+2\right)\,dx=\left[\frac{x^2}{4}+2x\right]_1^e=\frac{e^2}{4}+2e-\frac{9}{4}$$

Finalmente

$$I=\frac{e^2}{2}+2e-\left(\frac{e^2}{4}+2e-\frac{9}{4}\right)=\frac{e^2+9}{4}$$

Veamos la segunda parte. Sea

$$l=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\cos x}}=\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^{1/cos(\pi/2)}=\left\{\begin{matrix}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1\\ \cos\dfrac{\pi}{2}=0\end{matrix}\right\}=1^\infty$$

Para éste tipo de límites, debemos aplicar la regla e^λ, es decir, $l=e^\lambda$, donde

$$\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-1\right]\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-1}{\cos x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\{\text{L'Höpital}\}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{-\operatorname{sen}x}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{-1}=-1$$

luego $l=e^{-1}$.

Problema 7 Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

1. A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V=1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.

2. Dado el punto $Q(3,3,3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los vectores $\vec{a}=\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{b}=\overrightarrow{P_1P_3}$, $\vec{c}=\overrightarrow{P_1Q}$ como aristas con origen en Q. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?.

Recordamos por la teoría, que el volumen del tetraedro es

$$V=\frac{1}{6}\,\text{abs}\left(\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&3\\1&1&3&a\\1&0&2&3\end{vmatrix}\right)$$

Para el cálculo del determinante utilizamos la notación

$$S_{ij}(k)=\text{sumar a la fila } i \text{ la fila } j \text{ multiplicada por el número } k$$

operación, que no altera el valor del determinante. Según esto

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&3\\1&1&3&a\\1&0&2&3\end{vmatrix}=\{S_{21}(-1),\ S_{31}(-1),\ S_{41}(-1)\}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&2\\0&0&2&a-1\\0&-1&1&2\end{vmatrix}=\{S_{42}(1)\}=$$
$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&2\\0&0&2&a-1\\0&0&1&4\end{vmatrix}$$

Este último determinante lo desarrollamos por la primera columna

$$D=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&2&a-1\\0&1&4\end{vmatrix}=\{\text{Idem}\}=\begin{vmatrix}2&a-1\\1&4\end{vmatrix}=8-a+1=9-a$$

es decir

$$1=\frac{1}{6}|9-a|\Longrightarrow|9-a|=6\Longrightarrow\begin{cases}9-a=6\Longrightarrow a=3\\9-a=-6\Longrightarrow a=15\end{cases}$$

Si $a=15$ entonces

$$\overrightarrow{P_1Q}=Q-P_1=(3,15,3)-(1,1,1)=(2,14,2)\Longrightarrow||\overrightarrow{P_1Q}||=\sqrt{2^2+14^2+2^2}>10$$

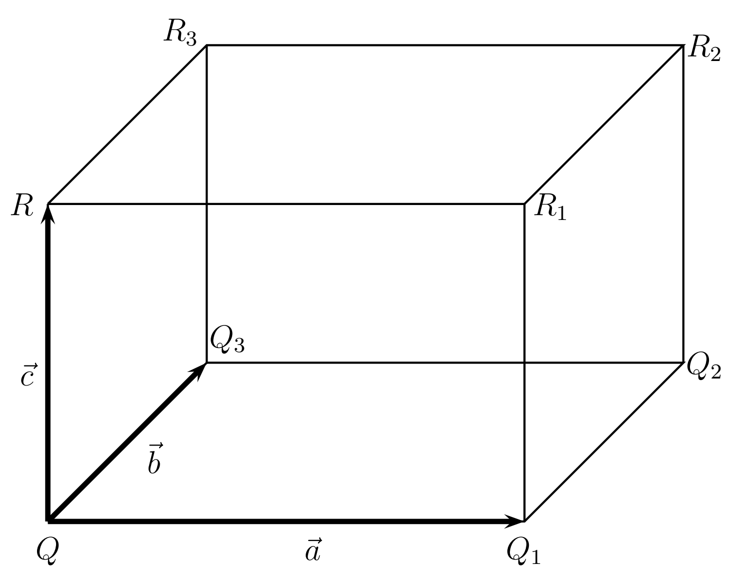
es decir, esta arista es >10, lo que no puede ser por el enunciado.

Concluyendo, es $a=3$.

Entramos en la segunda parte

$$\vec{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=(1,0,-1),\ \vec{b}=\overrightarrow{P_1P_3}=(0,2,1),\ \vec{c}=\overrightarrow{P_1Q}=(2,2,2)$$

Consideremos la figura



Tenemos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{QQ_1} = \vec{a} &\Longrightarrow Q_1 = Q + \vec{a} = (3,3,3) + (1,0,-1) = (4,3,2) \\
\overrightarrow{Q_1Q_2} = \vec{b} &\Longrightarrow Q_2 = Q_1 + \vec{b} = (4,3,2) + (0,2,1) = (4,5,3) \\
\overrightarrow{QQ_3} = \vec{b} &\Longrightarrow Q_3 = Q + \vec{b} = (3,3,3) + (0,2,1) = (3,5,4) \\
\overrightarrow{QR} = \vec{c} &\Longrightarrow R = Q + \vec{c} = (3,3,3) + (2,2,2) = (5,5,5) \\
\overrightarrow{RR_1} = \vec{a} &\Longrightarrow R_1 = R + \vec{a} = (5,5,5) + (1,0,-1) = (6,5,4) \\
\overrightarrow{R_1R_2} = \vec{b} &\Longrightarrow R_2 = R_1 + \vec{b} = (6,5,4) + (0,2,1) = (6,7,5) \\
\overrightarrow{RR_3} = \vec{b} &\Longrightarrow R_3 = R + \vec{b} = (5,5,5) + (0,2,1) = (5,7,6)
\end{aligned}$$

Problema 8 Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

1. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

2. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

El espacio muestral del experimento está formado por los pares (a, b), donde a es el número obtenido en el dado azul y b el del rojo. Mostramos a continuación el espacio muestral junto con las puntuaciones según la regla del enunciado.

$(1,1)$	2	$(2,1)$	4	$(3,1)$	4
$(1,2)$	3	$(2,2)$	6	$(3,2)$	5
$(1,3)$	4	$(2,3)$	8	$(3,3)$	6
$(1,4)$	5	$(2,4)$	10	$(3,4)$	7
$(1,5)$	6	$(2,5)$	12	$(3,5)$	8
$(1,6)$	7	$(2,6)$	14	$(3,6)$	9

$(4,1)$	6	$(5,1)$	6	$(6,1)$	8
$(4,2)$	8	$(5,2)$	7	$(6,2)$	10
$(4,3)$	10	$(5,3)$	8	$(6,3)$	12
$(4,4)$	12	$(5,4)$	9	$(6,4)$	14
$(4,5)$	14	$(5,5)$	10	$(6,5)$	16
$(4,6)$	16	$(5,6)$	11	$(6,6)$	18

Para el apartado primero, sea A el suceso **obtener una puntuación de 10**. Observando la tabla, vemos que solo hay 4 casos, luego

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Sea B el suceso **obtener una puntuación impar**. Contando los casos en la tabla, vemos que hay 9, luego

$$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Para la segunda parte, sea A el suceso **obtener un número par en el dado azul** y B el suceso **obtener una puntuación de 8**. Nos piden $P(A|B)$. Ahora bien

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

El suceso $A \cap B$ es **obtener un número par en el dado azul junto con que la puntuación sea de 8** . Observando la tabla vemos que solo hay 3 casos, mientra que obtener una puntuación de 8 hay 5 casos, luego

$$P(A|B) = \frac{3/36}{5/36} = \frac{3}{5}$$

Por último, sea A el suceso **obtener un número impar en el dado rojo** y B el suceso **obtener una puntuación par**. Nos piden $P(A|B)$. De forma parecida al cálculo anterior

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{18/36}{27/36} = \frac{2}{3}$$