Selectividad Matemáticas II, junio 2024, Andalucía

Pedro González Ruiz

10 de junio de 2024

Problema 1 Sea la función $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano y los puntos de su gráfica $A(1, 0)$ y $B(e, 1)$.

1. Determinar, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.

2. Determinar la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A.

La pendiente de la recta que pasa por dos puntos $P(x_0, y_0)$, $Q(x_1, y_1)$ es

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

luego, la pendiente de la recta que pasa por A y B es

$$m = \frac{1 - 0}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}$$

Como dos rectas paralelas tienen la misma pendiente y la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente, hemos de resolver la ecuación $f'(x) = m$. En fin, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, luego

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{e - 1} \Longrightarrow x = e - 1 \Longrightarrow f(e - 1) = \ln(e - 1)$$

En otras palabras, el punto $\big(e - 1, \ln(e - 1)\big)$ es el único que responde a la cuestión.

Para la segunda parte, la recta normal a una curva en un punto x_0 es

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) = \left\{ \begin{array}{c} x_0 = 1 \\ f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{1} = 1 \end{array} \right\} = 0 - 1(x - 1) = 1 - x$$

es decir, $y = 1 - x$.

Problema 2 Consideremos la función continua f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cos x - a \operatorname{sen} x}{x^3}, & \text{si } x < 0 \\ b \cos x - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcular a y b.

Como f es continua, ha de ser $f(0^+) = f(0^-)$. Ahora bien

$$f(0^+) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (b\cos x - 1) = b\cos 0 - 1 = \{\cos 0 = 1\} = b - 1$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x\cos x - a\operatorname{sen} x}{x^3} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \{\text{L'Höpital}\} = \\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\cos x - x\operatorname{sen} x - a\cos x}{3x^2} = \frac{1-a}{0} \end{aligned}$$

Si $a \neq 1$, el límite anterior es infinito, lo que es imposible ya que la función es continua en el punto $x = 0$. Así pues, ha de ser $a = 1$, con lo que

$$f(0^-) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x}{3x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-x\operatorname{sen} x}{3x^2} = -\frac{1}{3}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = -\frac{1}{3}$$

ya que es sabido que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. En fin

$$b - 1 = -\frac{1}{3} \Longrightarrow b = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Concluyendo, $a = 1$, $b = \dfrac{2}{3}$.

Problema 3 Consideremos la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x \neq \pm 1$. Calcular una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0,1)$.

Haciendo la división polinómica con resto entre el dividendo $D(x) = x^3 + 2$ y el divisor $d(x) = x^2 - 1$ obtenemos un cociente $c(x) = x$ y un resto $r(x) = x + 2$, y por tanto

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1} = x + \frac{x+2}{x^2-1} = x + \frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$$

En fin

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

luego

$$A(x+1) + B(x-1) = x + 2 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \Longrightarrow 2A = 3 \Longrightarrow A = \dfrac{3}{2} \\[2ex] x = -1 \Longrightarrow -2B = 1 \Longrightarrow B = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

luego

$$f(x) = x + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}$$

Una primitiva cualquiera de f es

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

Ahora bien, ha de ser

$$1 = F(0) = C \Longrightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + 1$$

Problema 4 Hallar la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = x\cos x$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi, 2\pi)$.

Como $f''(x) = x\cos x \Longrightarrow f'(x) = \int x\cos x\, dx$. Aplicamos la fórmula de la integración por partes

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx$$

Por tanto

$$\int x\cos x = \left\{\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \cos x \\ v(x) = \displaystyle\int v'(x)\, dx = \operatorname{sen} x \\ u'(x) = 1 \end{array}\right\} = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C_1$$

y como $f(x) = \int f'(x)\, dx$, es

$$f(x) = \int \big(x\operatorname{sen} x + \cos x + C_1\big)\, dx = \int x\operatorname{sen} x\, dx + \int \cos x\, dx + \int C_1\, dx = \int x \operatorname{sen} x\, dx + \operatorname{sen} x + C_1 x + C_2$$

Otra vez

$$\int x\operatorname{sen} x = \left\{\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = \operatorname{sen} x \\ v(x) = \displaystyle\int v'(x)\, dx = -\cos x \\ u'(x) = 1 \end{array}\right\} = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x$$

Recopilando resultados:

$$f(x) = -x\cos x + 2\operatorname{sen} x + C_1 x + C_2$$

Hemos de determiunar C_1 y C_2. Las condiciones iniciales son

$$\frac{\pi}{2} = f(0) = -0\cos 0 + 2\operatorname{sen} 0 + C_1\cdot 0 + C_2 \Longrightarrow C_2 = \frac{\pi}{2}$$

La segunda

$$2\pi = f(\pi) = -\pi\cos\pi + 2\operatorname{sen}\pi + C_1\pi + \frac{\pi}{2} = \left\{\begin{array}{l} \cos\pi = -1 \\ \operatorname{sen}\pi = 0 \end{array}\right\} = \pi + C_1\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \pi C_1$$

Es decir

$$2\pi = \frac{3\pi}{2} + \pi C_1 \Longrightarrow \{\text{simplificando}\} \Longrightarrow C_1 = \frac{1}{2}$$

En definitiva

$$f(x) = -x\cos x + 2\operatorname{sen} x + \frac{x+\pi}{2}$$

Problema 5 Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calcular A^{2024}.
2. Hallar la matriz X, si es posible, que verifica $A^2XA + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

Tenemos que

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otra vez

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego, parece que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/8 & n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Demostremos (1) por inducción. Para $n = 1, 2, 3$, (1) es cierto. Supongamos que es cierto para todo entero $\leq n$. Entonces

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n/8 & n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)/8 & (n+1)/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego, por el principio de inducción, (1) es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$. Con estos conocimientos, la parte primera es trivial, pues

$$A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 2024/8 & 2024/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por la regla de Sarrus, es sencillo comprobar a partir de (1) que $|A^n| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, luego A^n tiene inversa para todo $n \in \mathbb{N}$. Además

$$A^n \cdot A^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & n/8 & n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -n/8 & -n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

es decir

$$(A^n)^{-1} = A^{-n} \tag{2}$$

En fin, veamos ya la segunda parte. De $A^2XA + I = O \implies A^2XA = -I$. Multiplicando por A^{-2} a la izquierda, obtenemos $XA = -A^{-2}$, y multiplicando por A a la derecha es $X = -A^{-2} \cdot A^{-1} = -A^{-3}$, es decir

$$X = -\begin{pmatrix} 1 & -3/8 & -3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damos aquí el problema por acabado. **Lo que sigue es para alumnos avanzados.**

Sea $a \in \mathbb{R}$ cualquier número real, y para cada uno de estos a, consideremos la matriz

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea también

$$\mathcal{M} = \{M(a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

el conjunto de estas matrices.

Nuestro problema es un caso particular, en concreto, para $a = 1/8$. Tenemos

$$M(a) \cdot M(b) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b+a & b+a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(a+b)$$

Destacamos este resultado

$$M(a) \cdot M(b) = M(a+b) \tag{3}$$

es decir, la multiplicación es **cerrada** en $\mathcal{M}$, en otras palabras, es una ley de composición interna. Obviamente

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

y por tanto

$$M(a) \cdot M(-a) = M\big(a + (-a)\big) = M(0) = I$$

luego $M(a)$ es inversible para todo $a \in \mathbb{R}$ y

$$[M(a)]^{-1} = M(-a)$$

También

$$M(a) \cdot M(b) = M(a+b) = M(b+a) = M(b) \cdot M(a)$$

es decir, la multiplicación en $\mathcal{M}$ es **conmutativa**.

Todas estas propiedades pueden resumirse diciendo que $\mathcal{M}$ **es un grupo abeliano multiplicativo**.

Finalmente, en (3) tomamos $b = a$,

$$M(2a) = \big(M(a)\big)^2$$

Otra vez

$$M(3a) = M(2a) \cdot M(a) = \big(M(a)\big)^2 \cdot M(a) = \big(M(a)\big)^3$$

y por inducción

$$\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow M(na) = \big(M(a)\big)^n$$

Problema 6 Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} y + z &= 1 \\ (k-1)x + y + z &= k \\ x + (k-1)y + z &= 0 \end{aligned}$$

1. Discutir el sistema según los valores de k.
2. Para $k = 1$ resolver el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y = 0$?. En caso afirmativo, calcularla. En caso negativo, justifica la respuesta.

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix}, \quad n = 3$$

la matriz de los coeficientes y el número de incógnitas, respectivamente, del sistema. Desarrollando por la regla de Sarrus

$$|A| = (k-1)^2 + 1 - 1 - (k-1) = (k-1)^2 - (k-1) = (k-1)[(k-1) - 1] = (k-1)(k-2)$$

y por tanto

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow k = 1, 2$$

En fin, tenemos los siguientes casos

- $k \neq 1, 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$ ($r(X)$ denota el rango de la matriz X). Obviamente, $r(A') = 3$, siendo A' la matriz ampliada del sistema

  $$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Luego $r(A) = r(A') = n$. En este caso el sistema es **de Cramer**, y tiene por tanto, **solución única**.

- $k = 1$. La matriz ampliada del sistema es

  $$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Las filas primera y segunda son idénticas. Eliminamos la primera, con lo que la matriz resultante es

  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

  que es de rango 2. Como $n = 3$, el sistema es **compatible con infinitas soluciones dependientes de** $n - r = 3 - 2 = 1$ **parámetro.**

- $k = 2$. La matriz ampliada ahora es

  $$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Para la discusión del sistema vamos a utilizar la **reducción gaussiana** con la matriz ampliada, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

  1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
  2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
  3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

Tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{C_{12}\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{31}(-1)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Nos convencemos de que $r(A) = 2$ (por la fila de ceros en la matriz de los coeficientes), mientras que $r(A') = 3$, ya que el vector cero no aparece en la ampliada, y por tanto, en este caso, el sistema **es incompatible**.

Veamos la segunda parte. Para $k = 1$, por (4), el sistema queda como

$$\left\{\begin{array}{l} y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \{z = -t\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 1 - z = 1 + t \\ x = t \end{array}\right.$$

es decir

$$x = t,\ y = 1 + t,\ z = -t,\ t \in \mathbb{R}$$

que es la solución que nos piden. Además

$$y = 0 \Longrightarrow 1 + t = 0 \Longrightarrow t = -1 \Longrightarrow x = -1, z = 1$$

con lo que la respuesta es afirmativa, concretamente

$$x = -1,\ y = 0,\ z = 1$$

Problema 7 Hallar

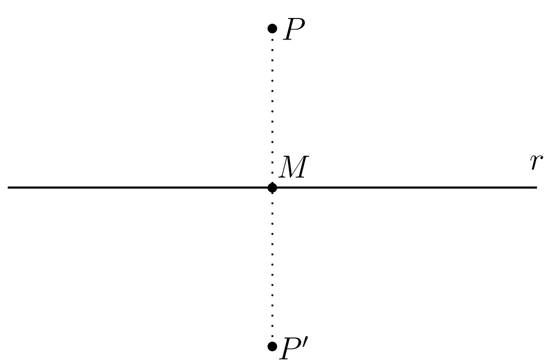
1. El punto simétrico de $P(2, 2, 1)$ respecto de la recta $r \equiv \left\{\begin{array}{r} x - 2y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{array}\right.$

2. El punto simétrico de $Q(1, -1, -3)$ respecto del plano $\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0$

Parametrizamos r:

$$r \equiv \left\{\begin{array}{r} x - 2y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \{y = t\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{array}\right.$$

Un vector director de r es $\vec{u} = (1, 1, 1)$. Sea $P'(a, b, c)$ el punto simétrico de P y M el punto medio del segmento PP' (ver figura):



Como $M \in r$, es $M(3+t, t, -1+t)$ para un cierto t. Por otro lado:

$$\overrightarrow{PM} = M - P = (3+t, t, t-1) - (2,2,1) = (t+1, t-2, t-2) \perp \vec{u} \Longrightarrow \overrightarrow{PM} \cdot \vec{u} = 0$$

o bien

$$(t+1, t-2, t-2) \cdot (1,1,1) = 0 \Longrightarrow t+1+t+2+t-2 = 0 \Longrightarrow t = 1$$

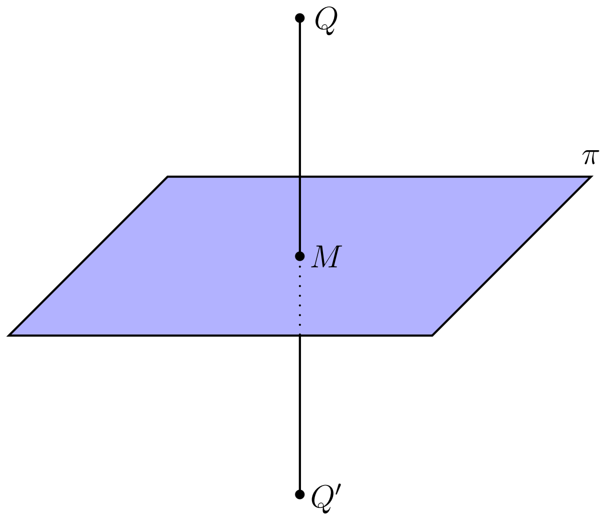
y por tanto $M(4,1,0)$. El punto M es el punto medio del segmento PP', luego

$$\frac{a+2}{2} = 4,\ \frac{b+2}{2} = 1,\ \frac{c+1}{2} = 0 \Longrightarrow a = 6,\ b = 0,\ c = -1 \Longrightarrow P'(6,0,-1)$$

En conclusión

$$P'(6,0,-1)$$

Para la segunda parte, observemos la siguiente figura



Sea r la recta perpendicular a π que pasa por Q. El vector $\vec{n} = (1,-2,1)$ formado por los coeficientes que acompañan a las x, y, z del plano π es, según se sabe por la teoría, perpendicular a π, y por tanto, un vector director de r, con lo cual

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = -3+t \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en π determinamos M. Así pues

$$x + y - z = 2 \Longrightarrow 1 + t - 2(-1-2t) - 3 + t + 6 = 0 \Longrightarrow 6t + 6 = 0 \Longrightarrow t = -1$$

luego

$$\left.\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = -3+t \end{cases}\right\} \Longrightarrow \{t = -1\} \Longrightarrow M(0,1,-4)$$

Finalmente, sea $Q'(a,b,c)$ el punto simétrico que vamos buscando. Como M es el punto medio del segmento QQ', tenemos

$$\frac{a+1}{2}=0,\ \frac{b-1}{2}=1,\ \frac{c-3}{2}=-4 \Longrightarrow a=-1,\ b=3,\ c=-5$$

y por consiguiente, $Q'(-1,3,-5)$ es el simétrico que nos han pedido.

Problema 8 Consideremos las rectas

$$r\equiv\begin{cases} y=0\\ 2x-z=0\end{cases} \qquad \text{y} \qquad s\equiv\begin{cases} x+y+7=0\\ z=0\end{cases}$$

1. Estudiar la posición relativa de r y s.

2. Calcular la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

Es conveniente tener las rectas en formas paramétrica y punto-(vector director). Para ello

$$r\equiv\left\{\begin{array}{r} y=0\\ 2x-z=0\end{array}\right\}\Longrightarrow\{x=t\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=t\\ y=0\\ z=2t\end{array}\right\}\equiv\begin{cases} P(0,0,0)\\ \vec{u}=(1,0,2)\end{cases}$$

También

$$s\equiv\left\{\begin{array}{r} x+y+7=0\\ z=0\end{array}\right\}\Longrightarrow\{y=-t\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-7+t\\ y=-t\\ z=0\end{array}\right\}\equiv\begin{cases} Q(-7,0,0)\\ \vec{v}=(1,-1,0)\end{cases}$$

Sabemos, por la teoría, que la posición relativa de r y s queda determinada por el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}\overrightarrow{PQ}\\ \vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\{\text{regla de Sarrus}\}\Longrightarrow |A|=-14\neq 0$$

luego rango$(A)=3$, con lo que **las rectas se cruzan**.

Para la segunda parte, sea π el plano pedido y $\vec{n}$ el vector normal a dicho plano. Como $r\parallel\pi$ y $s\parallel\pi$, es $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}$, es decir

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\bullet & \bullet & \bullet\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(2,2,-1)$$

luego $\pi\equiv 2x+2y-z+k=0$, siendo k una constante que hemos de calcular.

Si una recta es paralela a un plano, la distancia de la recta al plano es la distancia de cualquier punto de dicha recta al plano. Así pues

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|k|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{3}$$

Análogamente

$$d(s,\pi)=d(Q,\pi)=\frac{|-14+k|}{3}$$

Por el enunciado

$$\frac{|k|}{3} = \frac{|-14+k|}{3} \Longrightarrow |k| = |k-14|$$

y tenemos dos posibilidades

$$k = k - 14 \Longrightarrow 0 = -14, \text{ absurdo}$$

o bien

$$k = -(k-14) \Longrightarrow k = -k + 14 \Longrightarrow 2k = 14 \Longrightarrow k = 7$$

luego, el plano pedido es

$$\pi \equiv 2x + 2y - z + 7 = 0$$