Problemas resueltos correspondientes a la selectividad de Matemáticas II de septiembre de 2012, Andalucía

Pedro González Ruiz

13 de septiembre de 2012

1. Opción A

Problema 1.1 Sea la función continua $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x+k, & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}, & \text{si } x>0\end{cases}$$

1. Calcular el valor de k.
2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

Tenemos

$$f(0^-)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x+k)=0+k=k$$

Por otro lado:

$$f(0^+)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^2}{x^2}=1$$

En éste último límite hemos aplicado la equivalencia $e^z-1\sim z$, cuando $z\to 0$. Por el enunciado, la función es continua en $x=0$, luego $k=1$.

Para la segunda parte, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=1$, es:

$$y=f(1)+f'(1)(x-1)$$

Ahora bien

$$f(1)=\frac{e^{1^2}-1}{1^2}=e-1$$

Sea $g(x)=\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$. Derivando y simplificando:

$$g'(x)=2\frac{(x^2-1)e^{x^2}+1}{x^3}$$

luego

$$f'(1)=2\frac{(1^2-1)e^{1^2}+1}{1^3}=2$$

Por consiguiente, la recta tangente es:

$$y = e - 1 + 2(x-1) = 2x + e - 3$$

Problema 1.2 Sea

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\,dx$$

1. Expresar la integral I aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1-x}$.
2. Calcular el valor de I.

Sea $t = \sqrt{1-x}$. Entonces:

$$t^2 = 1 - x \Longrightarrow x = 1 - t^2 \Longrightarrow dx = -2t\,dt$$

Para $x = 0$ es $t = 1$, y para $x = 1$ es $t = 0$, luego:

$$I = \int_1^0 \frac{(1-t^2)(-2t)}{1+t}\,dt = 2\int_0^1 \frac{(1-t)(1+t)t}{1+t}\,dt = 2\int_0^1 t(1-t)\,dt =$$
$$= 2\int_0^1 (t-t^2)\,dt = 2\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Problema 1.3 Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{array}{rcrcr} kx & + & 2y & = & 2 \\ 2x & + & ky & = & k \\ x & - & y & = & -1 \end{array}$$

1. Probar que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k.
2. Especificar para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.
3. Hallar las soluciones en cada caso.

Reordenamos las ecuaciones, con lo que las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ k & 2 & \vdots & 2 \\ 2 & k & \vdots & k \end{pmatrix}$$

Los puntos verticales muestran la separación entre la matriz de los coeficientes y la ampliada.

Para el cálculo de los rangos, vamos a utilizar la **reducción gaussiana**, y para ello, recordamos las operaciones elementales de fila:

1. C_{ij} = cambiar las filas i, j.
2. $M_i(k)$ = multiplicar la fila i por el número $k \neq 0$.
3. $S_{ij}(k)$ = sumar a la fila i la fila j multiplicada por el número k.

En fin:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ k & 2 & \vdots & 2 \\ 2 & k & \vdots & k \end{pmatrix} \Longrightarrow \{S_{21}(-k), S_{31}(-2)\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & k+2 & \vdots & k+2 \\ 0 & k+2 & \vdots & k+2 \end{pmatrix}$$

La tercera fila es igual que la segunda, luego eliminamos aquella, con lo que el sistema queda como:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & k+2 & \vdots & k+2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Distinguimos dos casos:

- $k = -2$, entonces (1) queda como $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$, o bien

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

  El rango común r de las matrices de los coeficientes y ampliada es $r = 1$ y el número de incógnitas n es $n = 2$, luego el sistema es compatible indeterminado, o más detallado, compatible con infinitas soluciones dependientes de $n - r = 2 - 1 = 1$ parámetro. El sistema a resolver es $x - y = -1$, y llamando $x = t$, es $y = 1 + t$. Resumiendo:

  $$x = t, \ y = 1 + t, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

- $k \neq -2$, o bien $k + 2 \neq 0$. En este caso (1), puede simplificarse por $M_2\left(\frac{1}{k+2}\right)$, y queda como:

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

  El rango común r de las matrices de los coeficientes y ampliada es $r = 2$ y $n = 2$, luego el sistema es de Cramer y tiene solución única. Queda como:

  $$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

  Sustituyendo la segunda en la primera resulta $x = 0$, luego la solución es:

  $$x = 0, \ y = 1$$

Problema 1.4 Sean los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$.

1. Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
2. Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.
3. Calcular la distancia del punto D al plano π.

Los vectores directores de π son:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, -2), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, -3)$$

luego

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos $\pi \equiv 2x + 3y + z - 1 = 0$.

Sustituyendo las coordenadas de D en π resulta:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1 = 0, \text{ o bien, } 7 = 0$$

absurdo, luego $D \notin \pi$, y por consiguiente, los cuatro puntos no son coplanarios. Finalmente:

$$d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \{\text{racionalizando}\} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

2. Opción B

Problema 2.1 Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$ para $x \neq 1$.

1. Estudiar las asíntotas de la gráfica de la función f.
2. Hallar los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

El punto $x = 1$ es una discontinuidad asintótica, luego la recta $x = 1$ es asíntota vertical. Como no hay más discontinuidades de éste tipo, no hay más asíntotas verticales. Por otro lado:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \right) \cdot \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1-x} \right) = e^{-\infty} \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

Sin embargo:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \{-x = y\} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{y}}{1+y} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} =$$
$$= \{\text{L'Höpital}\} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^{y}}{1} = e^{+\infty} = +\infty$$

En conclusión:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

luego, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$. No hay asíntotas oblícuas.

Derivando y simplificando:

$$f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(x-1)^2}$$

Los factores e^{-x} y $(x-1)^2$ son positivos, luego solamente hay que tener en cuenta el factor x. Así pues, si $x < 0$, $f'(x) < 0$, luego f decrece en $]-\infty, 0[$, y si $x > 0$, f crece en $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ (no podemos escribir directamente $]0, +\infty[$ debido a la discontinuidad en $x = 1$).

Teniendo el crecimiento y decrecimiento, los extremos locales son sencillos, en concreto, f tiene un mínimo local en $x = 0$ de valor $f(0) = 1$. Resumiendo, el punto $(0, 1)$ es el único extremo local, en concreto, un mínimo.

Problema 2.2 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{9-x^2}{4}$$

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

2. Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $x + 2y = 5$ y el eje de abscisas. Calcular el área de dicho recinto.

La recta tangente en $x = 1$ es, $y = f(1) + f'(1)(x-1)$. Por un lado es $f(1) = \dfrac{9-1^2}{4} = 2$, y por otro:

$$f'(x) = -\frac{x}{2} \Longrightarrow f'(1) = -\frac{1}{2}$$

luego la recta tangente es:

$$y = 2 - \frac{1}{2}(x-1) = 2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5-x}{2}$$

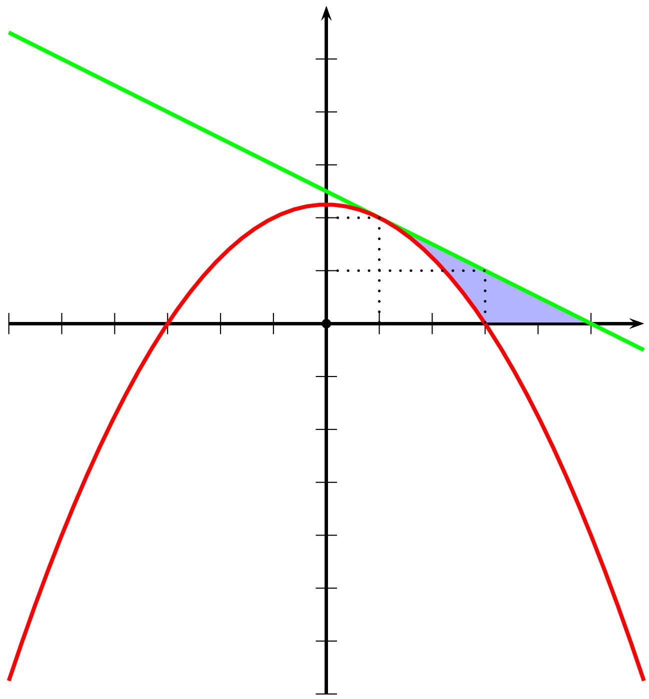
es decir:

$$y = \frac{5-x}{2}, \text{ o lo que es lo mismo, } x + 2y = 5$$

que es la recta del apartado segundo. Para dibujar esta recta, con dos puntos es suficiente. Uno de ellos es el punto de tangencia $(1, 2)$ y el otro el $(5, 0)$. La gráfica de f es una parábola, f es par, para $x = 0$ es $y = \frac{9}{4}$. Al revés, si $y = 0$, resulta $x = \pm 3$. El vértice es:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow -\frac{x}{2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow V\left(0, \frac{9}{4}\right)$$

Finalmente, como $f''(x) = -\frac{1}{2} < 0$, f es cóncava, y el recinto pedido es (recta tangente en verde y parábola en rojo):



Sea S la superficie de la región sombreada. El dominio no es simple. Lo descomponemos en dos simples, en concreto $x \in [1,3] \cup [3,5]$. Sean S_1 y S_2 las áreas de cada uno de ellos. Obviamente $S = S_1 + S_2$. En el intervalo $[3,5]$, el área es la de un triángulo rectángulo, luego:

$$S_2 = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

En $[1,3]$ es:

$$S_1 = \int_1^3 \left(\frac{5-x}{2} - \frac{9-x^2}{4} \right) dx = \int_1^3 \frac{x^2 - 2x + 1}{4}\, dx = \frac{1}{4} \int_1^3 (x-1)^2\, dx =$$
$$= \frac{1}{4} \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_1^3 = \frac{1}{12} \left[(x-1)^3 \right]_1^3 = \frac{1}{12} \cdot 8 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

luego $S = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. Con esto finaliza el problema. No obstante, si observamos el dominio desde el eje y, vemos que es simple, luego vamos a hacer lo mismo, pero integrando respecto a éste eje. La función inversa de $y = \frac{9-x^2}{4}$ es:

$$4y = 9 - x^2 \Longrightarrow x^2 = 9 - 4y \Longrightarrow x = \pm\sqrt{9-4y}$$

es decir, $x = +\sqrt{9-4y}$ puesto que la x es positiva.

La función inversa de $y = \frac{5-x}{2}$ es:

$$2y = 5 - x \Longrightarrow x = 5 - 2y$$

Por tanto:

$$S = \int_0^2 \left[(5-2y) - \sqrt{9-4y} \right] dy$$

En fin:

$$\int_0^2 \sqrt{9-4y}\, dy = -\frac{1}{4} \int_0^2 -4 \cdot (9-4y)^{1/2}\, dy = -\frac{1}{4} \left[\frac{(9-4y)^{3/2}}{3/2} \right]_0^2 = \{\text{cálculos}\} = \frac{13}{3}$$

También:

$$\int_0^2 (5-2y)\, dy = \left[5y - y^2 \right]_0^2 = 10 - 2^2 = 6$$

luego

$$S = 6 - \frac{13}{3} = \frac{5}{3}, \quad \text{c.q.d.}$$

Problema 2.3 Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} x - y &= \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z &= \lambda \\ -x - y + \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

1. Clasificarlo según los distintos valores del parámetro λ.
2. Resolverlo par $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando, obtenemos $|A| = 2\lambda(\lambda + 1)$, luego

$$|A| = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0 \text{ ó } \lambda = -1$$

Distinguimos tres casos:

- Si $\lambda \neq 0, -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$. La matriz ampliada también tiene rango 3, y el número de incógnitas también es 3. En definitiva, el sistema es de Cramer, y tiene por tanto solución única. No hay nada que resolver puesto que no nos lo han pedido.

- Si $\lambda = 0$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

  $$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Eliminamos la segunda fila, con lo cual la matriz queda como:

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Sumando a la segunda fila la primera:

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{\text{dividiendo por 2 la segunda fila}\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  es decir, $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A')$, el número de incógnitas es $n = 3$, luego es un sistema compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. El sistema queda como:

  $$x - y = 0, \ y = 0 \Longrightarrow x = 0$$

  luego, la solución es:

  $$x = 0, \ y = 0, \ z = t, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

- Si $\lambda = -1$, es $|A| = 0$, luego $r(A) < 3$. La matriz ampliada es

  $$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  La suma de la primera y tercera es la segunda, luego, eliminamos la tercera, con lo cual la matriz queda como:

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

  es decir, $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A')$, el número de incógnitas es $n = 3$, luego es un sistema compatible con infinitas soluciones dependientes de 1 parámetro. El sistema queda como:

  $$x - y = -1, \ -2y - z = -1$$

  Llamando $y = t$ es, $z = 1 - 2t$, $x = y - 1 = t - 1$, luego, la solución es:

  $$x = -1 + t, \ y = t, \ z = 1 - 2t, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Problema 2.4 Hallar el punto simétrico de $P(2,1,-5)$ respecto de la recta r definida por

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Parametrizamos r, y para ello, hacemos $x = t \Longrightarrow z = t$, y por tanto $y = -x - 2 = -t - 2$, es decir:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases}$$

Un vector director de r es $\vec{u} = (1, -1, 1)$. Sea π el plano perpendicular a r que pasa por P. El vector director de r es el vector normal de π, luego, la ecuación implícita de π es:

$$x - y + z + \lambda = 0$$

Como $P \in \pi$, tenemos:

$$2 - 1 - 5 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 4 \Longrightarrow \pi \equiv x - y + z + 4 = 0$$

Sea R el punto de intersección de r y π, es decir $R = r \cap \pi$. Como $R \in r$, R es de la forma $R = (t, -2 - t, t)$. Como además $R \in \pi$, debe cumplirse:

$$t + 2 + t + t + 4 = 0 \Longrightarrow 3t + 6 = 0 \Longrightarrow t = -2 \Longrightarrow R(-2, 0, -2)$$

El punto R es el punto medio del segmento PP', siendo $P'(a, b, c)$ el punto que andamos buscando. Aplicando la fórmula del punto medio:

$$\frac{a+2}{2} = -2,\ \frac{b+1}{2} = 0,\ \frac{c-5}{2} = -2 \Longrightarrow a = -6,\ b = -1,\ c = 1$$

luego el punto buscado es $P'(-6, -1, 1)$.